中国科学: 信息科学　2017 年　第 47 卷　第 3 期: 326–336
SCIENTIA SINICA Informationis
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论文

广义分布参数与广义集中参数耦合系统的极点配置问题

葛照强[1*], 冯德兴[2]

1. 西安交通大学应用数学系, 西安 710049
2. 中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所, 北京 100190
* 通信作者. E-mail: gezqjd@mail.xjtu.edu.cn

收稿日期: 2016–03–15; 接受日期: 2016–08–15; 网络出版日期: 2016–12–09
国家自然科学基金 (批准号: 61174081) 资助项目

摘要　应用泛函分析和算子理论研究了 Hilbert 空间中用一阶广义发展方程描述的广义分布参数系统与广义集中参数系统经过状态反馈所形成的耦合闭环广义系统具有预先指定的极点问题, 应用有界线性算子的有界内逆给出了实现极点配置的状态反馈的构造性表达式. 所得结果对于研究广义分布参数系统的极点配置问题及镇定问题都有重要的理论意义.

关键词　广义分布参数系统, 耦合闭环广义系统, 状态反馈, 极点配置, 有界线性算子的有界内逆

1　引言

广义分布参数系统是一类重要的系统, 它与分布参数系统有本质的区别 [1~8], 当受到干扰时会引起脉冲行为等. 极点配置问题是广义分布参数系统研究的重要问题之一. 文献 [9] 研究了一阶广义分布参数系统的极点配置问题, 给出了极点可配置的充分条件及实现极点配置的状态反馈的构造性表达式. 文献 [10] 研究了二阶广义分布参数系统的极点配置问题, 给出了极点可配置的充分条件及实现极点配置的状态反馈的构造性表达式. 在工程控制系统中, 一种很重要的情形是控制对象是广义分布参数系统, 控制器是广义集中参数系统. 对广义分布参数系统的某个物理量进行量测后输入到控制器, 由控制器输出信号到执行机构, 以实现对广义分布参数系统的反馈控制. 因此需要研究广义分布参数系统与广义集中参数系统所构成的耦合闭环广义系统的极点配置问题. 本文研究了由一阶广义分布参数系统与一阶广义集中参数系统所构成的耦合闭环广义系统的极点配置问题, 应用有界线性算子的有界内逆给出了实现极点配置的状态反馈的构造性表达式.

以下 H 表示复的可析的 Hilbert 空间, E_1 和 A 是 H 中的线性算子, E_1 有界; R^n 表示 n 维欧氏空间, $R^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 实矩阵全体所构成的集合, E_2, $F\in R^{n\times n}$ 且 $\det E_2=0$; $\langle\cdot\ ,\ \ \cdot\rangle$ 表示内积. 对

引用格式: 葛照强, 冯德兴. 广义分布参数与广义集中参数耦合系统的极点配置问题. 中国科学: 信息科学, 2017, 47: 326–336, doi: 10.1360/N112016-00054
Ge Z Q, Feng D X. Pole assignment for a singular distributed parameter system coupled with a singular lumped parameter system (in Chinese). Sci Sin Inform, 2017, 47: 326–336, doi: 10.1360/N112016-00054

于如下的用 H 中一阶广义发展方程所描述的控制系统和 n 阶广义常微分方程所描述的控制器

$$E_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax+bu,\quad x(0)=x_0,\tag{1}$$

$$E_2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=Fz+v,\quad z(0)=z_0.\tag{2}$$

设状态反馈为

$$u(t)=\langle z,g\rangle,\tag{3}$$

$$v(t)=\langle E_1x,\ g_0\rangle k_0+\left\langle E_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ g_1\right\rangle k_1,\tag{4}$$

其中 $z,g,k_0,k_1\in R^n$; $x,g_0,g_1,b\in H$, 代入系统 (1) 和 (2) 可得广义分布参数系统与广义集中参数系统所构成的闭环耦合广义系统:

$$\begin{cases}E_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax+\langle z,g\rangle b,\quad x(0)=x_0,\\ E_2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=Fz+\langle E_1\,x,g_0\rangle k_0+\left\langle E_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},g_1\right\rangle k_1,\quad z(0)=z_0.\end{cases}\tag{5}$$

令

$$Gz=\langle z,g\rangle b,\quad G_0x=\langle E_1x,\ g_0\rangle k_0,\quad G_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left\langle E_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ g_1\right\rangle k_1,$$

$$B_0=\begin{bmatrix}E_1 & 0\\ -G_1 & E_2\end{bmatrix},\quad T_0=\begin{bmatrix}A & G\\ G_0 & F\end{bmatrix},\quad y=\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix},$$

则系统 (5) 可变为

$$B_0\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=T_0y.\tag{6}$$

系统 (1) 和 (2) 的极点配置问题是对于预先给定的任意一组复数 $\{\alpha_i\}_1^N$ 是否存在 $g_i\in H$ $(i=0,1)$ 使得 α_i $(i=1,2,\ldots,N)$ 为闭环广义系统 (6) 的极点. 本文应用 Hilbert 空间中有界线性算子的有界内逆给出了实现上述极点配置的 $g_i\in H$ $(i=0,1)$ 的构造性表达式. 全文结构如下: 第 2 节给出必要的定义、引理和假设; 第 3 节给出极点配置的主要定理及证明; 第 4 节给出一个例子; 第 5 节给出简短的总结.

符号说明: 以下 E_1^* 表示 E_1 的伴随算子, $\sigma_p(E_1,A)$=$\{\lambda:\lambda$ 为 E_1 和 A 的广义特征值, 即存在 $x\in H$ 且 $x\neq 0$ 使 $\lambda E_1x=Ax$, 此时称 x 为相应于 E_1 和 A 的广义特征值 λ 的广义特征向量$\}$ 表示 E_1 和 A 的有限广义点谱, 即系统 (1) 的有限极点, $\rho(E_1,A)=\{\alpha:(\alpha E_1-A)$ 为正则算子$\}$; 对 $\alpha\in\rho(E_1,A)$, $R(\alpha E_1,A)=(\alpha E_1-A)^{-1}$ 表示 (αE_1-A) 的逆算子, I 表示恒等算子.

2　预备知识

本节给出以下各节要用的定义、引理及基本假设.

定义1 ([11])　设 $B(H)$ 表示 H 上有界线性算子所形成的 Banach 代数, $B\in B(H)$, 如果存在 $B^-\in B(H)$ 使 $BB^-B=B$, 则 B^- 称为有界线性算子 B 的有界内逆. 显然, 如果 E_1^- 存在, 则 $(E_1^*)^-$ 存在且 $(E_1^*)^-=(E_1^-)^*$.

引理1 ([12]) 如果 K 和 H 为两个 Hilbert 空间且 $\dim K<\infty$, 则 $M=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ 是 $K\times H$ 上的可逆算子的充要条件是 A 和 D 可逆且

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

应用引理 1 可直接证明引理 2.

引理2 令 $B_F=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}$, 则 $\lambda\in\rho(B_0,B_F)$ 当且仅当 $\lambda\in\rho(E_1,A)\cap\rho(E_2,F)$.

对 $\lambda\in\rho(B_0,B_F)$, 令 $c=\lambda\langle E_1R(\lambda E_1,A)b,g_1\rangle R(\lambda E_2,F)k_1+\langle E_1R(\lambda E_1,A)b,g_0\rangle R(\lambda E_2,F)k_0$, $w(\lambda)=\langle c,g\rangle$, 则有如下引理.

引理3 设 A 是闭的稠定的线性算子, E_1 和 A 仅有有限广义点谱, 如果 $\lambda\in\rho(B_0,B_F)$, 则 $\lambda\in\sigma_p(B_0,T_0)$ 当且仅当

$$w(\lambda)=1. \tag{8}$$

$y_0=\begin{bmatrix} R(\lambda E_1,A)b \\ c \end{bmatrix}$ 是相应于 B_0 和 T_0 的广义特征值 λ 的广义特征向量, 且特征子空间

$$\{y:\lambda B_0y=T_0y,y\in H\times R^n,y\neq 0\}$$

是一维的.

证明 设 $\lambda\in\rho(B_0,B_F)$, 如果 $w(\lambda)\neq 1$, 则 $\lambda\in\rho(B_0,T_0)$. 事实上, 因为

$$(\lambda B_0-T_0)^*=\begin{bmatrix} \bar{\lambda}E_1^*-A^* & -\bar{\lambda}G_1^*-G_0^* \\ -G^* & \bar{\lambda}E_2^*-F^* \end{bmatrix}, \tag{9}$$

对任意 $\psi_1\in H$, $\psi_2\in R^n$, $\psi=[\psi_1\ \ \psi_2]^{\mathrm{T}}$, 及 $y=[y_1\ \ y_2]^{\mathrm{T}}$, 令

$$(\lambda B_0-T_0)^*y=\psi. \tag{10}$$

把式 (9) 代入式 (10) 可得

$$(\bar{\lambda}E_1^*-A^*)y_1-(\bar{\lambda}G_1^*+G_0^*)y_2=\psi_1, \tag{11}$$

$$-G^*y_1+(\bar{\lambda}E_2^*-F^*)y_2=\psi_2. \tag{12}$$

因为 $\lambda\in\rho(B_0,B_F)$, 由引理 2 和式 (12) 有 $\lambda\in\rho(E_1,\ A)\cap\rho(E_2,F)$, 且

$$y_2=R^*(\lambda E_2,F)\psi_2+\langle y_1,b\rangle R^*(\lambda E_2,F)g. \tag{13}$$

把式 (13) 代入式 (11) 可得

$$y_1=h+\langle y_1,b\rangle h_1, \tag{14}$$

其中,

$$h=R^*(\lambda E_1,A)\psi_1+R^*(\lambda E_1,A)(\bar{\lambda}G_1^*+G_0^*)R^*(\lambda E_2,F)\psi_2,$$

$$h_1=R^*(\lambda E_1,A)(\bar{\lambda}G_1^*+G_0^*)R^*(\lambda E_2,F)g.$$

由式 (14) 两边内乘以 b 可得

$$\langle y_1,b\rangle=\langle h,b\rangle+\langle y_1,b\rangle\langle h_1,b\rangle, \tag{15}$$

且

$$\langle h_1, b\rangle = \bar{\lambda}\langle R^*(\lambda E_2, F)g, k_1\rangle\langle R^*(\lambda E_1, A)E_1^* g_1, b\rangle \\ + \langle R^*(\lambda E_2, F)g, k_0\rangle\langle R^*(\lambda E_1, A)E_1^* g_0, b\rangle = \overline{w(\lambda)}.$$

把上式代入式 (15) 有

$$\langle y_1, b\rangle = \langle h, b\rangle + \langle y_1, b\rangle\overline{w(\lambda)}. \tag{16}$$

由于 $w(\lambda) \neq 1$, 式 (16) 可写为

$$\langle y_1, b\rangle = \frac{\langle h, b\rangle}{1 - \overline{w(\lambda)}}. \tag{17}$$

把式 (17) 代入式 (14) 和 (13) 可得

$$y_1 = h + \frac{\langle h, b\rangle}{1 - \overline{w(\lambda)}} h_1, \tag{18}$$

$$y_2 = R^*(\lambda E_2, F)\psi_2 + \frac{\langle h, b\rangle}{1 - \overline{w(\lambda)}} R^*(\lambda E_2, F)g. \tag{19}$$

由式 (18), (19) 及 h 和 h_1 的表达式可知, y_1 和 y_2 连续依赖于 $\psi \in H$. 因此, 满足 $y = [(\lambda B_0 - T_0)^*]^{-1}\psi$ 的算子 $[(\lambda B_0 - T_0)^*]^{-1}$ 是有界线性算子. 从而 $(\lambda B_0 - T_0)^{-1}$ 是正则算子.

如果 $\lambda \in \rho(B_0, B_F)$ 且 $w(\lambda) = 1$, 需要证明 λ 是 B_0 和 T_0 的广义特征值, 且相应的广义特征向量为

$$y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(\lambda E_1, A)b \\ c \end{bmatrix}.$$

事实上, 设 $T = \left[\begin{smallmatrix} 0 & G \\ G_0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, 且 y_0 满足

$$(\lambda B_0 - T_0)y_0 = (\lambda B_0 - B_F - T)y_0 = (\lambda B_0 - B_F)[I - R(\lambda B_0 - B_F)T]y_0 = 0,$$

由 $\lambda \in \rho(B_0, B_F)$, 显然有 $\lambda \in \sigma_p(B_0, T_0)$ 且相应的广义特征向量为 $y_0 = [y_{10} \ \ y_{20}]^{\mathrm{T}}$ 的充要条件是

$$R(\lambda B_0, B_F)Ty_0 = y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix}.$$

因为

$$R(\lambda B_0, B_F)Ty_0 = \begin{bmatrix} R(\lambda E_1, A)Gy_{20} \\ \lambda R(\lambda E_2, F)G_1 R(\lambda E_1, A)Gy_{20} + R(\lambda E_2, F)G_0 y_{10} \end{bmatrix},$$

$$R(\lambda E_1, A)Gy_{20} = \langle y_{20}, g\rangle R(\lambda E_1, A)b = w(\lambda)R(\lambda E_1 - A)b = R(\lambda E_1, A)b = y_{10},$$

且

$$\begin{aligned} &\lambda R(\lambda E_2, F)G_1 R(\lambda E_1, A)Gy_{20} + R(\lambda E_2, F)G_0 y_{10} \\ &\quad = \lambda\langle y_{20}, g\rangle R(\lambda E_2, F)\langle E_1 R(\lambda E_1, A)b, g_1\rangle k_1 + \langle E_1 y_{10}, g_0\rangle R(\lambda E_2, F)k_0 \\ &\quad = \lambda\langle E_1 R(\lambda E_1, A)b, g_1\rangle R(\lambda E_2, F)k_1 + \langle E_1 R(\lambda E_1, A)b, g_0\rangle R(\lambda E_2, F)k_0 = c = y_{20}, \end{aligned}$$

从而 $\lambda \in \sigma_p(B_0, T_0)$, 且相应的广义特征向量为 $y_0 = \left[\begin{smallmatrix} R(\lambda E_1, A)b \\ c \end{smallmatrix}\right]$.

对 $\lambda \in \sigma_p(B_0, T_0)$, 令 $y = [y_1 \quad y_2]^{\mathrm{T}}$ 为任一不同的相应于 λ 的 B_0 和 T_0 的广义特征向量, 类似于上面的推理可得

$$y_1 = R(\lambda E_1, A) G y_2,$$

$$y_2 = R(\lambda E_2, F) G_0 y_1 + \lambda R(\lambda E_2, F) G_1 R(\lambda E_1, A) G y_2.$$

从而 $y_1 = \langle y_2, g\rangle R(\lambda E_1, A) b = \langle y_2, g\rangle y_{10}$,

$$\begin{aligned} y_2 &= \langle E_1 y_1, g_0\rangle R(\lambda E_2, F) k_0 + \lambda R(\lambda E_2, F)\langle y_2, g\rangle G_1 R(\lambda E_1, A) b \\ &= \langle y_2, g\rangle\langle (E_1 y_{10}, g_0) R(\lambda E_2, F) k_0 + \lambda \langle y_2, g\rangle \langle E_1 R(\lambda E_1, A) b, g_1\rangle R(\lambda E_2, F) k_1 \\ &= \langle y_2, g\rangle y_{20}, \end{aligned}$$

即 $y = \langle y_2, g\rangle y_0 = \lambda_1 y_0$. 因此, 对 $\lambda \in \sigma_p(B_0, T_0)$ 相应的广义特征子空间是一维的.

引理4 ([5]) 设 $x_i \in H$ 且 $x_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, N$), $y_{N+k} \in H$ 且 $y_{N+k} \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, H_i^{N-1}$ 表示由 $\{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N, y_{N+1}, y_{N+2}, \ldots\}$ 生成的闭线性子空间, 如果 $x_i \notin H_i^{N-1}$, 则存在 $g_2 \in H$ 使得

$$\langle x_i, g_2\rangle = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\langle y_k, g_2\rangle = 0, \quad k = N+1, N+2, \ldots.$$

条件1 设 A 是闭的稠定线性算子, E_1 和 A 仅有有限广义点谱 $\{\lambda_k\}_1^{\infty}$, 每个 λ_k 都是单重的, φ_k 是相应的广义特征向量, 即 $A\varphi_k = \lambda_k E_1 \varphi_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$; $\{\psi_k\}_1^{\infty}$ 是 E_1^* 和 A^* 的满足 $A^*\psi_k = \bar{\lambda}_k E_1^* \psi_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ 的广义特征向量全体, 构成 H 中的一个无条件基的子集; $\{E\varphi_k\}_1^{\infty}$ 和 $\{\psi_k\}_1^{\infty}$ 满足如下关系:

$$\langle E\varphi_k, \psi_l\rangle = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases} \quad k, l = 1, 2, \ldots.$$

条件2 设 $E_2, F \in R^{n\times n}$, E_2 和 F 仅有有限广义点谱 $\{r_k\}_1^{n_0} (n_0 \leqslant n)$, 每个 r_k 都是单重的, u_k 是相应的广义特征向量, 即 $F u_k = r_k E_2 u_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n_0)$; $\overline{r_k}$ 表示满足 $F^* v_k = \overline{r_k} E_2^* v_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n_0)$ 的 E_2^* 和 F^* 的广义特征向量, $\{E_2 u_k\}_1^{n_0}$ 和 $\{v_k\}_1^{n_0}$ 满足如下关系:

$$\langle E_2 u_k, v_l\rangle = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases} \quad k, l = 1, 2, \ldots, n_0.$$

3 极点配置问题

本节给出极点配置问题的主要定理及证明.

定理1 设 E_1 和 A 满足条件 1, E_2 和 F 满足条件 2, $b_k = \langle b, \psi_k\rangle \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, E_1^- 存在, $\{\alpha_i\}_1^N$ 是满足 $\alpha_i \neq \alpha_j$ $(i \neq j; i, j = 1, 2, \ldots, N)$ 的任意 N 个复数所构成的集合, 且

$$\alpha_i \notin \sigma_p(E_1, A) \cup \sigma_p(E_2, F), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

如果

$$d_{j\mu} = \alpha_j^{\mu}\langle R(\alpha_j E_2, F) k_\mu, g\rangle \neq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N; \mu = 0, 1,$$

则存在 $g_\mu \in H$ $(\mu = 0, 1)$ 使得 $\{\alpha_i\}_1^N \cup \{\lambda_k\}_{N+1}^\infty \subset \sigma_p(B_0, T_0)$, 且

$$g_\mu = \sum_{j=1}^N g_j^{(\mu)} \psi_j + \left[I - (E_1^*)^- E_1^*\right] a, \quad \mu = 0, 1,$$

其中,

$$\overline{g_j^{(\mu)}} = \frac{\alpha_j - \lambda_j}{2b_j} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^N \left(\frac{\alpha_k - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}\right) \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k - \lambda_k}{d_{k\mu}(\alpha_k - \lambda_j)} \cdot \prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^N \left(\frac{\alpha_k - \lambda_i}{\alpha_k - \alpha_i}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, N; \ \mu = 0, 1,$$

a 为 H 中任一元素.

证明 令

$$x_{\mu i} = \alpha_i^\mu \langle R(\alpha_i E_2, F) k_\mu, g\rangle E_1 R(\alpha_i E_1, A) b, \quad i = 1, 2, \ldots, N; \ \mu = 0, 1;$$

$$y_{k+N} = E_1 \varphi_{k+N}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

且 $H_{i\mu}^{N-1}$ $(\mu = 0, 1)$ 表示 $\{x_{\mu 1}, x_{\mu 2}, \ldots, x_{\mu i-1}, x_{\mu i+1}, \ldots, x_N, y_{N+1}, y_{N+2}, \ldots\}$ 生成的闭线性子空间, 则

$$x_{\mu i} \notin H_{i\mu}^{N-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

事实上, 如果 $x_{\mu i} \in H_{i\mu}^{N-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, 则存在数列

$$\beta_{\mu 1}, \beta_{\mu 2}, \ldots, \beta_{\mu i-1}, \beta_{\mu i+1}, \ldots, \beta_{\mu N}, \beta_{\mu N+1}, \beta_{\mu N+2}, \ldots,$$

使得

$$d_{i\mu} E_1 R(\alpha_i E_1, A) b = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^N \beta_{\mu j} d_{j\mu} E_1 R(\alpha_j E_1, A) b + \sum_{k=1}^\infty \beta_{\mu k+N} E_1 \varphi_{k+N}.$$

两边内乘以 ψ_l 可得

$$d_{i\mu} \langle E_1 R(\alpha_i E_1, A) b, \psi_l\rangle = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^N \beta_{\mu j} d_{j\mu} \langle E_1 R(\alpha_j E_1, A) b, \psi_l\rangle, \quad l = 1, 2, \ldots, N; \ \mu = 0, 1. \tag{20}$$

由于

$$(\overline{\alpha_j} - \overline{\lambda_l}) E_1^* \psi_l = \overline{\alpha_j} E_1^* \psi_l - \overline{\lambda_l} E_1^* \psi_l = (\overline{\alpha_j} E_1^* - A^*) \psi_l, \quad l = 1, 2, \ldots, N,$$
$$E_1^* \psi_l = \frac{1}{\overline{\alpha_j} - \overline{\lambda_l}} (\overline{\alpha_j} E_1^* - A^*) \psi_l, \quad l = 1, 2, \ldots, N,$$

代入式 (20), 有

$$\frac{d_{i\mu} b_l}{\alpha_i - \lambda_l} = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^N \frac{\beta_{\mu j} d_{j\mu} b_l}{\alpha_j - \lambda_l}, \quad l = 1, 2, \ldots, N; \ \mu = 0, 1. \tag{21}$$

令 $b_{lj} = \frac{1}{\alpha_j - \lambda_l}$ $(j, l = 1, 2, \ldots, N)$, 矩阵 $D_N = [b_{lj}]_{N\times N}$, 则

$$\det D_N = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant N} (\alpha_i - \alpha_j) \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant N} (\lambda_i - \lambda_j)}{\prod\limits_{i=1}^N \prod\limits_{j=1}^N (\alpha_i - \lambda_j)}.$$

由假设条件可知 $\det D_N \neq 0$. 从而方程组 (21) 无解. 因此 $x_{\mu i} \notin H_{i\mu}^{N-1}$ $(i=1,2,\dots N;\ \mu=0,1)$. 由引理 4 知存在 $g_\mu \in H$ $(\mu=0,1)$, 使

$$d_{i\mu}\langle E_1R(\alpha_iE_1,A)b,g_\mu\rangle{=}1/2,\quad i=1,2,\dots,N;\ \mu=0,1,\tag{22}$$

$$\langle y_k,g_\mu\rangle{=}0,\quad k=N+1,N+2,\dots;\ \mu=0,1.\tag{23}$$

从而 $w(\alpha_i)=1$ 且

$$g_\mu=\sum_{k=1}^{N}g_k^{(\mu)}\psi_k+[I-(E_1^*)^-E_1^*]a,\quad \mu=0,1,$$

其中 a 是 H 中任一元, 且

$$\begin{aligned}1/2&=d_{i\mu}\langle E_0R(\alpha_iE_1,A)b,g_\mu\rangle\\&=d_{i\mu}\sum_{j=1}^{N}\overline{g_j^{(\mu)}}\langle E_1R(\alpha_iE_1,A)b,\psi_j\rangle,\quad \mu=0,1,\end{aligned}\tag{24}$$

即

$$\sum_{j=1}^{N}\overline{g_j^{(\mu)}}\frac{b_i}{\alpha_i-\lambda_j}=\frac{1}{2d_{i\mu}},\quad i=1,2,\dots,N;\ \mu=0,1.\tag{25}$$

式 (25) 的解为

$$\overline{g_k^{(\mu)}}=\frac{\alpha_k-\lambda_k}{2b_k}\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{N}\left(\frac{\alpha_j-\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_k}\right)\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j-\lambda_j}{d_{j\mu}(\alpha_j-\lambda_k)}\cdot\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{N}\left(\frac{\alpha_j-\lambda_i}{\alpha_j-\alpha_i}\right),\quad k=1,2,\dots,N;\ \mu=0,1.$$

由引理 3, 有 $\alpha_i\in\sigma_p(B_0,T_0)\,(i=1,2,\dots,N)$.

对 $\lambda_k\in\sigma_p(E_1,A)\,(k=N+1,N+2,\dots)$, 令 $V_k=[\varphi_k\ \ 0]^{\mathrm{T}}$, 则由式 (23), 可得

$$\begin{aligned}T_0V_k&=\begin{bmatrix}A&0\\0&F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_k\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&G\\G_0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_k\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A\varphi_k\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\G_0\varphi_k\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\lambda_kE_1\varphi_k\\\langle E_1\varphi_k,g_0\rangle k_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_kE_1\varphi_k\\0\end{bmatrix}=\lambda_k\begin{bmatrix}E_1\varphi_k\\0\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\lambda_kB_0V_k=\lambda_k\begin{bmatrix}E_1&0\\-G_1&E_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_k\\0\end{bmatrix}=\lambda_k\begin{bmatrix}E_1\varphi_k\\-G_1\varphi_k\end{bmatrix}=\lambda_k\begin{bmatrix}E_1\varphi_k\\\langle E_1\varphi_k,g_1\rangle k_1\end{bmatrix}=\lambda_k\begin{bmatrix}E_1\varphi_k\\0\end{bmatrix}.$$

从而 $T_0V_k=\lambda_kB_0V_k$ $(k\geqslant N+1)$, 这意味着 $\{\lambda_k\}_{N+1}^{+\infty}\subset\sigma_p(B_0,T_0)$. 因此定理 1 成立.

定理2 设 E_1 和 A 满足条件 1, E_2 和 F 满足条件 2, $b_k=\langle b,\psi_k\rangle\neq0$ $(k=1,2,\dots)$, E_1^- 存在, 且存在 $\delta>0$ 使 $\inf\limits_{k\neq l}|\lambda_k-\lambda_l|\geqslant\delta$ 成立, $\{\alpha_i\}_1^\infty$ 是满足 $\alpha_i\neq\alpha_j$ $(i\neq j;\ i,j,=1,2,\dots)$ 的任一复数集合, 且

$$\alpha_i\notin\sigma_p(E_1,A)\cup\sigma_p(E_2,F),\quad i=1,2,\dots,$$

如果 $d_i^{(\mu)}=\alpha_i^\mu\langle R(\alpha_iE_2,F)k_\mu,g\rangle\neq0$ $(i{=}1{,}2{,}\dots{,}\mu=0,1)$, 且下列级数收敛:

(i) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha_i-\lambda_i}{b_i}\right|^2$,

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\frac{b_i}{d_i^{(\mu)}}|^2(\mu=0,1)$,

(iii) $\sum\limits_{l=1}^{\infty}|\frac{\alpha_l-\lambda_l}{b_l}|^2\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{\infty}|\frac{\alpha_k-\lambda_l}{\lambda_k-\lambda_l}|^2|\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j-\lambda_j}{d_j^{(\mu)}(\alpha_j-\lambda_l)}\cdot\prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{\infty}\frac{\lambda_i-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j}|^2$,

则存在 $g_\mu\in H$ $(\mu=0,\ 1)$ 使 $\{\alpha_i\}_1^\infty\subset\sigma_p(B_0,T_0)$, 且

$$g_\mu=\sum_{l=1}^{\infty}a_l^{(\mu)}\psi_l+[I-(E_1^*)^-E_1^*]a,\quad \mu=0,\ 1,$$

其中

$$\overline{a_l^{(\mu)}}=\frac{\alpha_l-\lambda_l}{2b_l}\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{\infty}\frac{\alpha_k-\lambda_l}{\lambda_k-\lambda_l}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j-\lambda_j}{d_j^{(\mu)}(\alpha_j-\lambda_l)}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{\infty}\frac{\lambda_i-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j},$$

a 为 H 中任一元.

证明 设 $g(z)=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\frac{z-\alpha_k}{z-\lambda_k}$,

$$h_\mu(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j-\lambda_j}{d_j^{(\mu)}(\alpha_j-z)}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{\infty}\frac{\lambda_i-\alpha_j}{\alpha_i-\lambda_j},\quad \mu=0,\ 1,$$

因为级数 (i) 收敛, 不难知 $g(z)$ 是以 λ_k $(k=1,2,\ldots)$ 为单极点, α_k $(k=1,2,\ldots)$ 为零点的半纯函数. 因为级数 (i) 和 (ii) 收敛, 不难知 $h_\mu(z)$ 是以 α_j $(j=1,2,\ldots)$ 为单极点的半纯函数. 令 $f_\mu(z)=g(z)h_\mu(z)$, 则

$$f_\mu(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j-\alpha_j}{d_j^{(\mu)}(z-\lambda_j)}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty}\frac{z-\alpha_k}{z-\lambda_k}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty}\frac{\lambda_k-\alpha_j}{\alpha_k-\lambda_j}.\tag{26}$$

因此 $f_\mu(z)$ 是以 λ_k $(k=1,2,\ldots)$ 为单极点的半纯函数且

$$\lim_{\substack{z\notin\sigma_p(E_1,A)\\z\to\infty}}\frac{f_\mu(z)}{z}=0.$$

由复变函数论的结果可得

$$f_\mu(z)=f_\mu(z_0)+\sum_{l=1}^{\infty}c_l^{(\mu)}\left(\frac{1}{z-\lambda_l}+\frac{1}{\lambda_l-z_0}\right),$$

其中 $z_0\notin\sigma_p(E_1,A)$ 是 $f_\mu(z)$ 的正则点, $c_l^{(\mu)}$ 是 $f_\mu(z)$ 在极点 λ_l 处的残数. 由 $\lim\limits_{\substack{z_0\notin\sigma_p(E_1,A)\\z\to\infty}}f_\mu(z)=0$, 有

$$f_\mu(z)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{c_l^{(\mu)}}{z-\lambda_l}.\tag{27}$$

由 $f_\mu(z)$ 的定义, 可得

$$c_l^{(\mu)}=-(\alpha_l-\lambda_l)\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{\infty}\frac{\alpha_k-\lambda_l}{\lambda_k-\lambda_l}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j-\lambda_j}{d_j^{(\mu)}(\alpha_j-\lambda_l)}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{\infty}\frac{\lambda_i-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j},\quad l=1,2,\ldots;\mu=0,1.$$

根据式 (26), 有

$$f_\mu(\alpha_l)=\frac{-1}{d_l^{(\mu)}}\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{\infty}\frac{\alpha_l-\alpha_k}{\alpha_l-\lambda_k}\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{\infty}\frac{\lambda_k-\alpha_l}{\alpha_k-\alpha_l}$$

$$= \frac{-1}{d_l^{(\mu)}} \prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{\infty} \frac{\alpha_l-\alpha_k}{\alpha_l-\lambda_k} \prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{\infty} \frac{\alpha_l-\lambda_k}{\alpha_l-\alpha_k} = \frac{-1}{d_l^{(\mu)}}, \quad l=1,2,\ldots;\mu=0,1. \tag{28}$$

令 $z=\alpha_j$, 由式 (27) 和 (28) 有

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{-c_l^{(\mu)}}{\alpha_j-\lambda_l} = \frac{1}{d_j^{(\mu)}}, \quad j=1,2,\ldots. \tag{29}$$

令 $a_j^{(\mu)} = \frac{-\overline{c_j^{(\mu)}}}{2\bar{b}_j}$ $(j=1,2,\ldots)$, 由于级数 (iii) 收敛, 有 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}|\frac{c_l^{(\mu)}}{b_l}|^2<\infty$. 从而 $g_\mu \in H$ $(\mu=0,1)$, 其中

$$g_\mu = \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{(\mu)}\psi_l + [I-(E_1^*)^- E_1^*]a, \quad \mu=0,\ 1,$$

a 为 H 中任一元. 由式 (29), 有

$$\begin{aligned} w(\alpha_j) &= \alpha_j\langle E_1R(\alpha_jE_1,A)b,g_1\rangle\langle R(\alpha_jE_2,F)k_1,g\rangle + \langle E_1R(\alpha_jE_1,A)b,g_0\rangle\langle R(\alpha_jE_2,F)k_0,g\rangle \\ &= \alpha_j\langle R(\alpha_jE_2,F)k_1,g\rangle \sum_{l=1}^{\infty}\overline{a_l^{(1)}}\langle E_1R(\alpha_jE_1,A)b,\psi_l\rangle \\ &\quad + \langle R(\alpha_jE_2,F)k_0,g\rangle \sum_{l=1}^{\infty}\overline{a_l^{(0)}}\langle E_1R(\alpha_jE_1,A)b,\psi_l\rangle \\ &= -d_j^{(1)}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{b_l}{\alpha_j-\lambda_l}\frac{c_l^{(1)}}{2b_l} - d_j^{(0)}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{b_l}{\alpha_j-\lambda_l}\frac{c_i^{(0)}}{2b_l} = 1. \end{aligned}$$

应用引理 3, 有 $\alpha_j\in\sigma_p(B_0,T_0)$ $(j=1,2,\ldots)$. 因此 $\{\alpha_i\}_1^\infty\subset\sigma_p(B_0,T_0)$, 即定理 2 成立.

4 举例

考虑 $H\times H$ 和 $R^n\times R^n$ 中如下的广义系统:

$$\left\{\begin{aligned} &\begin{bmatrix} I & 0\\ I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0\\ A_{11}-I & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_1\\0\end{bmatrix}u,\\ &\begin{bmatrix} I_1 & 0\\ I_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & 0\\ F_{11}-I_1 & I_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}v_1\\0\end{bmatrix}, \end{aligned}\right. \tag{30}$$

其中 I_1 是 R^n 中的恒等矩阵, A_{11} 和 F_{11} 满足文献 [6] 中定理 1 (定理 2) 的条件, 状态反馈为

$$\begin{aligned} v = \begin{bmatrix}v_1\\0\end{bmatrix} &= \left\langle \begin{bmatrix} I & 0\\ I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}g_1\\0\end{bmatrix}\right\rangle \begin{bmatrix}k_1\\0\end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} I & 0\\ I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}g_0\\0\end{bmatrix}\right\rangle \begin{bmatrix}k_0\\0\end{bmatrix} \\ &= \left\langle \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, g_1\right\rangle \begin{bmatrix}k_1\\0\end{bmatrix} + \langle x_1,g_0\rangle \begin{bmatrix}k_0\\0\end{bmatrix}, \end{aligned}$$

代入式 (30) 可得闭环耦合广义系统

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{11} - I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \langle z_1, g \rangle \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ I_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{11} - I_1 & I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, g_1 \right\rangle k_1 + \langle x_1, g_0 \rangle k_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{31}$$

不难证明 $\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}^-$ 存在且 $\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}^- = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}$ 和 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{11} - I & I \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ I_1 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $F = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{11} - I_1 & I_1 \end{bmatrix}$ 满足定理 1 (定理 2) 的条件. 因此, 对闭环耦合广义系统 (31) 定理 1 (定理 2) 的结论成立.

5 结论

应用算子理论研究了 Hilbert 空间中一阶耦合广义系统的状态反馈和极点配置问题. 给出了极点配置的充分条件及实现极点配置的状态反馈的构造性表达式, 并通过例子说明了极点配置的结论. 如果系统 (1) 是二阶广义分布参数系统, 则本文的结果需要修改.

参考文献

1 Trazaska Z, Maszalek W. Singular distributed parameter systems. IEEE Proc-D Control Theo App, 1993, 140: 305–308

2 Ge Z Q, Zhu G T, Feng D X. Exact controllability for singular distributed parameter system in Hilbert space. Sci China Ser F-Inf Sci, 2009, 52: 2045–2052

3 Ge Z Q, Feng D X. Well-posed problem of nonlinear singular distributed parameter systems and nonlinear GE-semigroup. Sci China Inf Sci, 2013, 56: 128201

4 Sun S H. On spectrum distribution of completely controllable linear system. SIAM J Control Optim, 1981, 19: 730–743

5 Wang K N, Lü T, Zou Z Y. On the pole assignment for the distributed parameter system. Sci China Ser A, 1982, 12: 172–184 [王康宁, 吕涛, 邹振宇. 分布参数控制系统的极点配置问题. 中国科学 A 辑, 1982, 12: 172–184]

6 Wang K N. On the pole assignment for the distributed parameter system coupled with lumped parameter system. J Sys Sci Math Sci, 1982, 2: 95–108 [王康宁. 分布参数与集中参数耦合系统的极点配置问题. 系统科学与数学, 1982, 2: 95–108]

7 Fat Ho L. Spectrum assignability of systems with scalar control and application to a degenerate hyperbolic system. SIAM J Control Optim, 1986, 24: 1212–1231

8 Xu C, Sallet G. On spectrum and Riesz basis assignment of infinite-dimensional linear systems by bounded linear feedbacks. SIAM J Control Optim, 1996, 34: 521–541

9 Ge Z Q, Ma Y H. Pole assignment of the first order generalized distributed parameter system. Chin Ann Math, 2001, 22A: 729–734 [葛照强, 马勇镐. 一阶广义分布参数系统的极点配置问题. 数学年刊, 2001, 22A: 729–734]

10 Liu F, Ge Z Q, Shi G D. The control synthesis problem for the second order singular distributed parameter system with multiple inputs. Sci Sin Inform, 2012, 42: 1445–1458 [刘锋, 葛照强, 史国栋. 多输入的二阶广义分布参数系统的控制综合问题. 中国科学: 信息科学, 2012, 42: 1445–1458]

11 Wang Y W. Theory of Generalized Inverse of Operator and its Applications in Banach Space. Beijing: Science Press, 2005 [王玉文. Banach 空间中算子广义逆理论及应用. 北京: 科学出版社, 2005]

12 Halmos P R. A Hilbert Space Problem Book. New York: Springer-Verlag, 1982

Pole assignment for a singular distributed parameter system coupled with a singular lumped parameter system

Zhaoqiang GE[1*] & Dexing FENG[2]

1. *Department of Applied Mathematics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049*, China*;
2. *Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Science, Beijing* 100190*, China*
*Corresponding author. E-mail: gezqjd@mail.xjtu.edu.cn

Abstract The pole assignment for a first order singular distributed parameter control system coupled with a first order singular lumped parameter control system is discussed via functional analysis and operator theory in Hilbert space. The solutions of the problem and the constructive expressions of the solutions are given by the bounded inner inverse of the bounded linear operator. This research is theoretically important for studying the pole assignment and stabilizability of singular distributed parameter control systems.

Keywords singular distributed parameter systems, coupled closed loop singular systems, state feedback, pole assignment, bounded inner inverse of bounded linear operator

Zhaoqiang GE was born in 1960. He received his B.S. degree from the Northwest University, Xi'an, in 1983. Currently, he is a professor at Xi'an Jiaotong University. His research interests include generalized control systems of finite dimensions, generalized control systems of infinite dimensions, robust control, optimal control, and social and economic control systems.