

不确定信息网络专题

# Markov 切换拓扑下异构多智能体系统的均方一致性

莫立坡\*, 潘婷婷

北京工商大学理学院, 北京 100048

\* 通信作者. E-mail: beihangmlp@126.com

收稿日期: 2016-08-25; 接受日期: 2016-10-26; 网络出版日期: 2016-11-09

国家自然科学基金(批准号: 61304155)和北京市组织部优秀人才项目(批准号: 2012D005003000005)资助项目

**摘要** 针对由一阶智能体和二阶智能体构成的异构多智能体系统, 研究了其拓扑结构 Markov 切换下的均方一致性问题. 首先, 基于邻居信息分别对一阶智能体和二阶智能体设计了控制协议. 其次, 利用随机不可约非周期矩阵的性质, 得到了使得异构多智能体系统实现均方一致所需的充分必要条件. 最后, 数值仿真验证了理论结果的有效性.

**关键词** 异构 多智能体系统 Markov 切换 一致性 均方稳定性

## 1 引言

近来, 多智能体系统的分布式协同控制问题受到了各领域学者的广泛关注. 正如我们所知道的, 一致性问题是分布式协同控制领域的基本问题. 1995 年, Vicsek 等<sup>[1]</sup> 提出 Vicsek 模型, 基于智能体邻居信息, 设计了使得闭环系统实现一致的控制协议. 随后, 利用代数图论和矩阵理论, Jadbabaie 等<sup>[2]</sup> 对 Vicsek 模型给出了严格的理论解释. Olfati-Saber 等<sup>[3]</sup> 针对智能体间信息传递的方向性, 将代数连通度的概念引入有向图中, 首次研究了有向多智能体网络一致性问题. Ren 和 Beard<sup>[4]</sup> 进一步推广了上述学者的研究结果, 利用随机非负不可约矩阵的性质, 在动态网络拓扑的联合拓扑具有生成树的条件下, 证明了离散系统以及连续系统的渐近一致性. Lin 等<sup>[5]</sup> 考虑了模型具有不确定性的多智能体系统, 利用鲁棒分析方法, 分别讨论了拓扑结构固定以及拓扑结构切换的系统  $H_\infty$  一致性问题. 对于多智能体系统中含有领导者的问题, Zhang 等<sup>[6]</sup> 研究了速度信息未知的二阶多智能体系统, 解决了系统的领导 – 跟踪一致问题. 当多智能体系统存在外界干扰时, 利用随机分析的方法, Li 和 Zhang<sup>[7~9]</sup> 讨论了多智能体系统的平均一致问题, 在通信拓扑网络连通的假设下, 证明了各智能体与系统初态平均值之间的误差可以足够小. Cheng 等<sup>[10]</sup> 考虑了一般线性时变动态系统, 利用增益向量来消除干扰对获得信息准确性的影响, 证明了当拓扑结构具有生成树时, 多智能体系统可以实现一致.

由于实际工程系统中的多智能体的结构可能不完全相同, 最近, 一类由一阶智能体和二阶智能体构成的异构多智能体系统的一致性问题受到了学者的广泛关注. Zheng 等<sup>[11]</sup> 考虑了拓扑结构为无向

引用格式: 莫立坡, 潘婷婷. Markov 切换拓扑下异构多智能体系统的均方一致性. 中国科学: 信息科学, 2016, 46: 1621–1632, doi: 10.1360/N112016-00140

连通图时的异构多智能体系统, 通过设计一个饱和控制协议, 利用 Lyapunov 函数方法, 证明了异构多智能体系统的一致性. Liu 等<sup>[12]</sup> 讨论了离散异构多智能体系统的一致性问题, 利用非负矩阵的性质, 给出了在异构多智能体系统存在有界通信时延时可以达到一致的充分条件. 对于连续时间异构多智能体系统, Zheng 等<sup>[13, 14]</sup> 研究了有向固定和切换拓扑下的一致性问题和有向图下的包围控制问题. 利用输出规则, Haghshenas 等<sup>[15]</sup> 解决了容许控制的一致性问题. 当异构多智能体系统的参数不能准确获得时, 利用自适应一致协议, Liu 等<sup>[16]</sup> 证明了参数未知的异构系统的一致性. 对于固定拓扑下多智能体系统, Liu 等<sup>[17]</sup> 得到了使得异构多智能体系统实现渐进一致的充分必要条件, 并且给出了最终的收敛状态. 同时, 对于切换拓扑下多智能体系统, 给出了异构多智能体系统实现渐进一致的充分条件. Geng 等<sup>[18]</sup> 分别讨论了带有静态领导者和动态领导者的异构多智能体系统的一致性问题. 通过构造分布式观测器来处理动态领导者的信不能被观测的问题, 解决了固定无向连通的拓扑下, 异构多智能体系统的一致性问题. Mo 等<sup>[19]</sup> 讨论了存在外界干扰的异构多智能体系统, 通过线性矩阵不等式的方法给出了系统实现  $H_\infty$  一致的条件, 并且给出了干扰为零时系统收敛的最终状态. 随后, 在文献 [20] 中, 作者证明了在通信拓扑联合连通下异构多智能体系统可以实现一致. Tian 等<sup>[21]</sup> 把异构多智能体系统的问题推广到高阶, 通过一个自适应算法, 解决了带有未知通信时延的异构多智能体系统的一致性问题.

在实际系统中, 由于干扰总是不可避免的, 为了应对此类问题, Zhang 等<sup>[22]</sup> 提出了随机多智能体系统的一致性问题, 得到了切换拓扑下, 多智能体实现均方一致的充分必要条件. 另一方面, 由于智能体间的信息交换也具有一定的随机性, 随机切换多智能体系统的一致性是一个有价值的研究方向. Wang 等和 Miao 等分别基于分布式输出反馈控制和容许控制, 得到了 Markov 切换拓扑下多智能体系统实现一致性的条件<sup>[23, 24]</sup>. Xie 等<sup>[25]</sup> 考虑带有领导者的切换系统, 由于只有部分智能体可以获得领导者的位置和速度信息, 利用扰动控制理论, 可以使多智能体系统实现有界一致. Lou 等<sup>[26]</sup> 研究 Markov 切换拓扑下有多级领导者的多智能体系统的一致性问题, 得到了可以使所有智能体渐进收敛到静态领导者状态的凸集的充分必要条件.

从文献可以看出, 拓扑结构 Markov 切换下多智能体系统的一致性问题是一个有一定工程意义和理论意义的课题, 然而, 对于拓扑结构 Markov 切换下异构多智能体系统的研究结果还比较少. 基于此, 本文主要讨论异构多智能体系统在拓扑结构具有 Markov 切换拓扑时的一致性问题. 通过利用非负随机不可约矩阵的性质, 我们得到使系统实现均方一致性的充分必要条件. 最后, 利用数值仿真验证了理论结果的有效性.

## 2 预备知识

### 2.1 图论简介

考虑由  $n$  个智能体构成的多智能体系统, 每个智能体用一个节点表示, 智能体  $i$  用  $v_i$  表示,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 智能体间通信情况用节点间的边表示, 例如边  $(v_i, v_j)$  表示智能体  $j$  能够收到来自智能体  $i$  的信息. 由节点集  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 、边集  $E \subseteq V \times V$  和一个邻接矩阵  $A = [a_{ij}]$  构成一个图  $G = (V, E, A)$ . 在图  $G$  中,  $(v_i, v_j) \in E$  表示智能体  $j$  能收到智能体  $i$  的信息. 当  $(v_i, v_j) \in E \Leftrightarrow (v_j, v_i) \in E$  时, 称图  $G$  为无向图. 如果  $(v_j, v_i) \in E$ , 则称智能体  $j$  是智能体  $i$  的邻居, 智能体  $i$  的全部邻居用  $N_i$  表示, 即  $N_i = \{j : (v_j, v_i) \in E\}$ . 节点之间的连接关系用邻接矩阵  $A = [a_{ij}]$  表示. 其中矩阵  $A$  中的元素  $a_{ij}$  取值为 0 或 1, 当  $(v_j, v_i) \in E$  时,  $a_{ij} = 1$ , 否则  $a_{ij} = 0$ , 这里规定  $a_{ii} = 0$ , 即图中无自环.

图  $G$  的度阵  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  是一个对角矩阵, 其中对角元素  $d_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}$ . Lapras 矩阵为  $L = D - A$ . 当邻接矩阵是对称阵时, 此时, 图  $G$  为无向图, 则相应的 Lapras 矩阵也是对称矩阵.

本文假设多智能体间的通信拓扑是 Markov 切换的. 设  $\{\sigma(k), k \in \mathbb{N}\}$  是一个遍历的齐次 Markov 链, 其状态空间为  $S = \{1, 2, \dots, s\}$ . 转移概率矩阵  $P \in \mathbb{R}^{s \times s}$ , 其中元素  $P_{ij} = \Pr\{\sigma(k+1) = j | \sigma(k) = i\}, \forall i, j \in S$ , 即从第  $i$  个拓扑结构转换为第  $j$  个拓扑结构的概率为  $P_{ij}$ , 显然,  $\sum_{j=1}^s P_{ij} = 1, \forall i \in M$ . 假设 Markov 切换拓扑  $G_{\sigma(k)}$  取值于集合  $\{G_1, G_2, \dots, G_s\}$ , 相应地, Lapras 矩阵  $L_{\sigma(k)}$  取值于集合  $\{L_1, L_2, \dots, L_s\}$ .

对于矩阵  $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 如果其元素  $c_{ij}$  是非负的, 那么称矩阵  $C$  是非负矩阵. 如果非负矩阵满足  $C\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_m$ , 则此非负矩阵称为随机矩阵. 随机矩阵  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  被称作随机不可约非周期矩阵 (SIA), 如果  $\lim_{m \rightarrow \infty} B^m = \mathbf{1}_n f^T$ , 其中  $f \in \mathbb{R}^n$ .

## 2.2 异构多智能体系统模型

考虑一个由一阶智能体和二阶智能体构成的异构多智能体系统, 其中二阶智能体的个数为  $m$  个, 一阶智能体的个数为  $n$  个. 假设二阶智能体的动态方程为

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= x_i(k) + T v_i(k), & i = 1, \dots, m, \\ v_i(k+1) &= v_i(k) + T u_i(k), \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $x_i(k) \in \mathbb{R}$  以及  $v_i(k) \in \mathbb{R}$  分别代表二阶智能体  $i$  的位置,  $u_i(k) \in \mathbb{R}$  表示其控制输入.

假设一阶智能体的动态方程为

$$x_i(k+1) = x_i(k) + T u_i(k), \quad i = m+1, \dots, m+n, \quad (2)$$

其中  $x_i(k) \in \mathbb{R}$  表示一阶智能体  $i$  的位置信息,  $u_i(k) \in \mathbb{R}$  表示其控制输入.

本文对二阶智能体, 采用如下控制协议:

$$u_i(k) = -p_i v_i(k) + \sum_{j \in N_i(k)} a_{ij}(k)(x_j(k) - x_i(k)), \quad i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

对一阶智能体, 采用如下控制协议:

$$u_i(k) = \sum_{j \in N_i(k)} a_{ij}(k)(x_j(k) - x_i(k)), \quad i = m+1, \dots, m+n, \quad (4)$$

其中  $p_i > 0$  为控制参数.  $N_i(k) = N_i^f(k) \cup N_i^s(k)$ ,  $N_i^f(k)$  和  $N_i^s(k)$  分别代表智能体  $i$  在  $k$  时刻的一阶智能体邻居和二阶智能体邻居.

对于系统 (1) 和 (2), 利用协议 (3) 和 (4), 可以得到如下闭环系统:

$$\begin{pmatrix} x_s(k+1) \\ v_s(k+1) \\ x_f(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & TI_m & 0 \\ -T\bar{L}_s^{\sigma(k)} & I_m - AT & TA_{sf}^{\sigma(k)} \\ TA_{fs}^{\sigma(k)} & 0 & I_n - T\bar{L}_f^{\sigma(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s(k) \\ v_s(k) \\ x_f(k) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

其中  $x_s(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_{m-1}(k), x_m(k)]^T$ ,  $v_s(k) = [v_1(k), v_2(k), \dots, v_{m-1}(k), v_m(k)]^T$ ,  $x_f(k) = [x_{m+1}(k), x_{m+2}(k), \dots, x_{m+n}(k)]^T$ ,  $A = \text{diag}\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ ,  $\bar{L}_s^{\sigma(k)} = L_s^{\sigma(k)} + D_{sf}^{\sigma(k)}$ ,  $\bar{L}_f^{\sigma(k)} = L_f^{\sigma(k)} +$

$D_{fs}^{\sigma(k)}$ ,  $L_s^{\sigma(k)}$  和  $L_f^{\sigma(k)}$  分别代表二阶智能体所形成的网络拓扑和一阶智能体所形成的网络拓扑的 Laplace 矩阵,  $D_{sf}^{\sigma(k)} = \text{diag}\{\sum_{j \in N_1^f} a_{1j}(k), \dots, \sum_{j \in N_m^f} a_{mj}(k)\}$ ,  $D_{fs}^{\sigma(k)} = \text{diag}\{\sum_{j \in N_{m+1}^s} a_{m+1,j}(k), \dots, \sum_{j \in N_{m+n}^s} a_{m+n,j}(k)\}$ , 将网络拓扑的邻接矩阵  $A^{\sigma(k)}$  分块为

$$A^{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} A_s^{\sigma(k)} & A_{sf}^{\sigma(k)} \\ A_{fs}^{\sigma(k)} & A_f^{\sigma(k)} \end{bmatrix},$$

其中  $A_s^{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $A_f^{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A_{sf}^{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $A_{fs}^{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . 容易验证系统相应网络的 Laplace 矩阵可以表示为

$$L^{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} \bar{L}_s^{\sigma(k)} & -A_{sf}^{\sigma(k)} \\ -A_{fs}^{\sigma(k)} & \bar{L}_f^{\sigma(k)} \end{bmatrix}.$$

**定义 1** 考虑异构多智能体系统 (1) 和 (2). 假设该系统的拓扑结构是 Markov 切换的, 称控制协议 (3) 和 (4) 可以解决系统 (1) 和 (2) 的均方一致问题, 如果下面的等式成立:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[\|x_i(k) - x_j(k)\|^2] = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, m+n,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[\|v_i(k) - v_j(k)\|^2] = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

### 3 主要结果

定义  $Q = \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 \\ I_m & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ , 易知  $Q$  是可逆矩阵. 令

$$z(k) = \begin{bmatrix} x_s(k) \\ y_s(k) \\ x_f(k) \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x_s(k) \\ y_s(k) \\ x_f(k) \end{bmatrix},$$

则闭环系统 (5) 可以变为如下形式:

$$z(k+1) = W_{\sigma(k)} z(k), \quad (6)$$

其中

$$W_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} I_m - TI_m & TI_m & 0 \\ -TI_m + AT - T\bar{L}_s^{\sigma(k)} & (1+T)I_m - AT & TA_{sf}^{\sigma(k)} \\ TA_{fs}^{\sigma(k)} & 0 & I_n - T\bar{L}_f^{\sigma(k)} \end{bmatrix}.$$

**引理 1** ([27]) 设  $\mathcal{F} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  是有限个  $n$  阶 SIA 矩阵集合. 若对任意  $j \in \mathbb{Z}^+$ ,  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_j} \in \mathcal{F}$ , 有  $p_{i_1}p_{i_2} \cdots p_{i_j}$  仍是 SIA 矩阵, 则对于无穷矩阵序列  $p_{i_k} \in \mathcal{F}$ , 存在  $c \in \mathbb{R}^n$ , 使得  $\lim_{j \rightarrow \infty} p_{i_1}p_{i_2} \cdots p_{i_j} = \mathbf{1}_n c^T$ .

**引理 2** ([25]) 设  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是随机矩阵, 若  $\lambda = 1$  是  $A$  的一重 (代数重数) 特征值, 且其余特征值的模均小于 1, 则  $A$  是 SIA 矩阵.

**引理 3** 若  $T < \frac{1}{n+m-1}$ , 则必存在正数  $p_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , 使得  $\forall j \in S$ ,  $W_j$  是非负随机矩阵, 且对角元素非零.

**证明** 由于  $a_{ij}(k)$  要么为 0, 要么为 1, 故对于任意的  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$$1 - T \sum_{j \neq i} a_{ij}(k) \geq 1 - T(m+n-1) > 0,$$

即  $I_n - T\bar{L}_f^j$  是非负矩阵, 且对角线元素大于零.

又因为  $1 + \frac{1}{T} > p_i > m + n$ , 从而

$$-T + p_i T - T \sum_{j \neq i} a_{ij}(k) > -T + p_i T - T(m+n-1) = T(-1 + p_i - (m+n-1)) > 0,$$

即  $-TI_m + AT - T\bar{L}_s^j$  是非负矩阵.

显然  $I_m - TI_m$  为非负矩阵, 因此  $W_j$  为非负矩阵且对角元素均严格大于零.

**引理 4** 若马氏链  $\{\sigma(k)\}$  是遍历的, 且状态空间  $S = \{1, 2, \dots, s\}$ , 则一定存在正整数  $r$ , 使得对任意的  $i, j \in S$ , 存在  $i_1, i_2, \dots, i_{r-1} \in S$  且  $\{j, i_1, i_2, \dots, i_{r-1}\} = S$ , 有  $P_{ji_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{r-1} i} > 0$ .

**证明** 对于有限状态的遍历马氏链, 根据有限马氏链理论 [28], 存在正整数  $r_0$ , 使得对于任意的正整数  $r > r_0$ , 都有对任意的  $i, j \in S$ , 有  $P_{ij}^{(r)} > 0$ , 其中  $P_{ij}^{(r)} = P\{\sigma(k+r) = j \mid \sigma(k) = i\}$ . 又因为  $\{\sigma(k)\}$  的状态空间  $S$  是不可约的正常返闭集, 所以一定存在  $i_1, i_2, \dots, i_{r-1} \in S$  且  $\{j, i_1, i_2, \dots, i_{r-1}\} = S$ , 有  $P_{ji_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{r-1} i} > 0$ . 再由马氏链状态的有限性可以知道, 一定存在公共的正整数  $r$ , 使得对任意的  $i, j \in S$ , 存在  $i_1, i_2, \dots, i_{r-1} \in S$  且  $\{j, i_1, i_2, \dots, i_{r-1}\} = S$ , 有  $P_{ji_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{r-1} i} > 0$ .

**引理 5** 设  $\{\sigma(k)\}$  是状态空间  $S = \{1, 2, \dots, s\}$  的有限状态遍历的齐次马氏链,  $r$  为引理 4 所确定的正整数, 则  $\forall i, j \in S$ ,  $\frac{1}{P_{ji}^{(r)}} (\Lambda^r)_{ij}$  是 SIA 矩阵, 其中

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \cdots & \Lambda_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{s1} & \cdots & \Lambda_{ss} \end{bmatrix},$$

$\Lambda_{ij} \triangleq P_{ji} W_j \otimes W_j$ ,  $(\Lambda^r)_{ij}$  表示矩阵  $\Lambda^r$  的第  $i$  行第  $j$  列位置的元素.

**证明** 根据引理 4, 对于任意的  $i, j \in S$ , 一定存在  $i_1, i_2, \dots, i_{r-1}$ , 且  $\{j, i_1, i_2, \dots, i_{r-1}\} = S$ , 使得  $P_{ji_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{r-1} i} > 0$ . 下证  $W_j W_{i_1} \cdots W_{i_{r-1}}$  是 SIA 矩阵. 记  $i_0 = j$ , 则

$$\frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} W_{i_l} = \begin{bmatrix} (1-T)I_m & TI_m & 0 \\ -TI_m + AT - T \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} \bar{L}_s^{i_l} & (1+T)I_m - AT & T \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} A_{sf}^{i_l} \\ T \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} A_{fs}^{i_l} & 0 & I_n - T \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} \bar{L}_f^{i_l} \end{bmatrix},$$

从而

$$\frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} W_{i_l} - I = \begin{bmatrix} -TI_m & TI_m & 0 \\ -TI_m + AT - T \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} \bar{L}_s^{i_l} & TI_m - AT & T \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} A_{sf}^{i_l} \\ T \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} A_{fs}^{i_l} & 0 & -T \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} \bar{L}_f^{i_l} \end{bmatrix},$$

利用分块矩阵的初等变换, 可得

$$\frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} W_{i_l} - I \rightarrow \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{l=0}^{r-1} \bar{L}_s^{i_l} & -\sum_{l=0}^{r-1} A_{sf}^{i_l} \\ 0 & -\sum_{l=0}^{r-1} A_{fs}^{i_l} & \sum_{l=0}^{r-1} \bar{L}_f^{i_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & \sum_{l=0}^{r-1} L^{i_l} \end{bmatrix},$$

由于  $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_s$  具有有向生成树, 故  $\text{rank}(\sum_{l=0}^{r-1} L^{i_l}) = m + n - 1$  (详见文献 [4]). 因此,  $\text{rank}(\frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} W_{i_l} - I) = 2m + n - 1$ , 即  $\lambda = 1$  是矩阵  $\frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} W_{i_l}$  的代数重数为 1 的特征值. 类似可以证明  $\lambda = -1$  不是矩阵  $\frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} W_{i_l}$  的特征值. 又因为  $\frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} W_{i_l}$  是随机矩阵, 所以  $\frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} W_{i_l}$  的其余特征值的模均小于 1. 利用引理 2 可知  $\frac{1}{r} \sum_{l=0}^{r-1} W_{i_l}$  是 SIA 矩阵, 利用文献 [4] 中的引理 3.9 可以证明  $W_j W_{i_1} \cdots W_{i_{r-1}}$  是 SIA 矩阵. 又  $\frac{1}{P_{j_i}^{(r)}} (\Lambda^r)_{ij} = \frac{1}{P_{j_i}^{(r)}} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_{r-1} \leq s} P_{j_1 j_1} P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{r-1} i} (W_j W_{j_1} \cdots W_{j_{r-1}}) \otimes (W_j W_{j_1} \cdots W_{j_{r-1}})$ , 且  $P_{j_1 j_1} P_{j_1 j_2} \cdots P_{j_{r-1} i} (W_j W_{i_1} \cdots W_{i_{r-1}}) \otimes (W_j W_{i_1} \cdots W_{i_{r-1}})$  必为和式中的某一项. 因此  $\frac{1}{P_{j_i}^{(r)}} (\Lambda^r)_{ij}$  是 SIA 矩阵.

有了前面的准备工作, 下面来陈述本文的主要结果.

**定理 1** 考虑异构多智能体系统 (1) 和 (2), 假设  $T < \frac{1}{m+n-1}$ , ( $m > 1, n > 1$ ),  $\{\sigma(k)\}$  是状态空间为  $S = \{1, 2, \dots, s\}$  的遍历的齐次马氏链, 则控制协议 (4) 可以解决多智能体系统的均方一致性问题的充分必要条件是多智能体系统的联合拓扑具有有向生成树, 即联合网络具有全局可达点.

**证明** 首先证明充分性. 考虑等价系统 (6) 的状态向量的二阶矩. 定义  $V(k) = E[z(k)z(k)^T]$ , 记  $V_i(k) = E[z(k)z(k)^T 1_{\{\sigma(k)=i\}}]$ , 其中  $1_{\{\sigma(k)=i\}}$  是事件  $\{\sigma(k)=i\}$  的示性函数, 则  $V(k) = \sum_{i=1}^s V_i(k)$ . 利用全期望公式, 可以得到

$$\begin{aligned} V_i(k+1) &= E[z(k+1)z(k+1)^T 1_{\{\sigma(k+1)=i\}}] \\ &= \sum_{j=1}^s E[W_{\sigma(k)} z(k) z(k)^T W_{\sigma(k)}^T 1_{\{\sigma(k+1)=i\}} \mid \sigma(k) = j] P\{\sigma(k) = j\} \\ &= \sum_{j=1}^s E[W_j z(k) z(k)^T W_j^T \mid \sigma(k) = j] E[1_{\{\sigma(k+1)=i\}} \mid \sigma(k) = j] P\{\sigma(k) = j\} \\ &= \sum_{j=1}^s W_j E[z(k) z(k)^T \mid \sigma(k) = j] P\{\sigma(k) = j\} W_j^T P_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^s P_{ji} W_j E[z(k) z(k)^T 1_{\{\sigma(k)=j\}}] W_j^T \\ &= \sum_{j=1}^s P_{ji} W_j V_j(k) W_j^T. \end{aligned}$$

利用矩阵拉长变换 (详见文献 [29]), 将  $V_1(k), V_2(k), \dots, V_s(k)$  的所有列向量拉成一列, 记为  $\xi(k)$ , 则

$$\xi(k+1) = \Lambda \xi(k), \quad (7)$$

其中  $\Lambda$  如引理 5 定义. 系统 (7) 的初始条件为  $V_i(0) = q_i z(0) z(0)^T$  拉长所得到的  $\xi(0)$ , 其中  $[q_1, q_2, \dots, q_s]$  为马氏链  $\{\sigma(k)\}$  的初始分布. 下面通过研究系统 (7) 的收敛性来研究系统 (6) 的一致性.

根据引理 1 和 5 可知, 对于任意给定的  $i, j \in S$ ,  $\frac{1}{P_{j_i}^{(r)}} (\Lambda^r)_{ij}$  是 SIA 矩阵, 因此一定存在  $c_{ij} \in \mathbb{R}^{(2m+n)^2}$ , 使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\Lambda^{rt})_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ji}^{(rt)} [\frac{1}{P_{j_i}^{(rt)}} (\Lambda^{rt})_{ij}] = \pi_i \mathbf{1} c_{ij}^T$ , 其中  $t \in \mathbb{Z}^+$ ,  $[\pi_1, \dots, \pi_s]$  是马氏链  $\{\sigma(k)\}$  的平稳不变分布, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda^{rt} = \begin{bmatrix} \pi_1 \mathbf{1} c_{11}^T & \pi_1 \mathbf{1} c_{12}^T & \cdots & \pi_1 \mathbf{1} c_{1s}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_s \mathbf{1} c_{s1}^T & \pi_s \mathbf{1} c_{s2}^T & \cdots & \pi_s \mathbf{1} c_{ss}^T \end{bmatrix},$$

故  $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(rt) = [\alpha_1 \mathbf{1} \ \alpha_2 \mathbf{1} \ \cdots \ \alpha_s \mathbf{1}]^T$ , 其中  $\alpha_i = \pi_i \sum_{j=1}^s (c_{ij}^T \xi_j(0))$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ . 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} V_i(rt) = \alpha_i \mathbf{1} \mathbf{1}^T$ , 从而,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(rt) = \beta \mathbf{1} \mathbf{1}^T,$$

其中  $\beta = \sum_{i=1}^s \alpha_i$ . 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} E[z(rt)z(rt)^T] = \beta \mathbf{1} \mathbf{1}^T$ .

对任意的  $k \in Z^+$ , 取  $t$  为满足  $rt \leq k$  的最大整数, 则

$$\begin{aligned} & E[z(k)z(k)^T] \\ &= E[W_{\sigma(k)} \cdots W_{\sigma(rt+1)} z(rt) z(rt)^T W_{\sigma(rt+1)}^T \cdots W_{\sigma(k)}^T] \\ &= \sum_{0 \leq i_k, \dots, i_{rt+1} \leq s} E[W_{i_k} \cdots W_{i_{rt+1}} z(rt) z(rt)^T W_{i_{rt+1}}^T \cdots W_{i_k}^T] P\{\sigma(k) = i_k, \dots, \sigma(rt+1) = i_{rt+1}\} \\ &= \sum_{0 \leq i_k, \dots, i_{rt+1} \leq s} W_{i_k} \cdots W_{i_{rt+1}} E[z(rt)z(rt)^T] W_{i_{rt+1}}^T \cdots W_{i_k}^T P\{\sigma(k) = i_k, \dots, \sigma(rt+1) = i_{rt+1}\}. \end{aligned}$$

由于  $W_{i_k} \cdots W_{i_{rt+1}} (\beta \mathbf{1} \mathbf{1}^T) W_{i_{rt+1}}^T \cdots W_{i_k}^T = \beta \mathbf{1} \mathbf{1}^T$ , 故  $\lim_{k \rightarrow \infty} E[z(k)z(k)^T] = \beta \mathbf{1} \mathbf{1}^T$ .

令  $\varepsilon(k) = z(k) - \mathbf{1}_{2m+n} \cdot \frac{1}{2m+n} \sum_{j=1}^{2m+n} z_j(k) = (I_{2m+n} - \frac{\mathbf{1}_{2m+n} \mathbf{1}_{2m+n}^T}{\mathbf{1}_{2m+n}^T \mathbf{1}_{2m+n}}) z(k)$ , 则

$$E[\varepsilon(k)\varepsilon(k)^T] = \left( I_{2m+n} - \frac{\mathbf{1}_{2m+n} \mathbf{1}_{2m+n}^T}{\mathbf{1}_{2m+n}^T \mathbf{1}_{2m+n}} \right) E[z(k)z(k)^T] \left( I_{2m+n} - \frac{\mathbf{1}_{2m+n} \mathbf{1}_{2m+n}^T}{\mathbf{1}_{2m+n}^T \mathbf{1}_{2m+n}} \right).$$

因此,

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} E[\varepsilon(k)\varepsilon(k)^T] \\ &= \left( I_{2m+n} - \frac{\mathbf{1}_{2m+n} \mathbf{1}_{2m+n}^T}{\mathbf{1}_{2m+n}^T \mathbf{1}_{2m+n}} \right) \lim_{k \rightarrow \infty} E[z(k)z(k)^T] \left( I_{2m+n} - \frac{\mathbf{1}_{2m+n} \mathbf{1}_{2m+n}^T}{\mathbf{1}_{2m+n}^T \mathbf{1}_{2m+n}} \right) \\ &= \left( I_{2m+n} - \frac{\mathbf{1}_{2m+n} \mathbf{1}_{2m+n}^T}{\mathbf{1}_{2m+n}^T \mathbf{1}_{2m+n}} \right) \beta \mathbf{1} \mathbf{1}^T \left( I_{2m+n} - \frac{\mathbf{1}_{2m+n} \mathbf{1}_{2m+n}^T}{\mathbf{1}_{2m+n}^T \mathbf{1}_{2m+n}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

而  $\lim_{k \rightarrow \infty} E[\varepsilon(k)^T \varepsilon(k)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(E[\varepsilon(k)\varepsilon(k)^T]) = 0$ , 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\left[ \left\| z(k) - \mathbf{1}_{2m+n} \cdot \frac{1}{2m+n} \sum_{j=1}^{2m+n} z_j(k) \right\|^2 \right] = 0,$$

故可以得到,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[\|z_i(k) - z_j(k)\|^2] = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, 2m+n.$$

利用  $[x_s(k) \ v_s(k) \ x_f(k)]^T = Qz(k)$ , 很容易得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[|x_i(k) - x_j(k)|^2] = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, 2m+n,$$

且  $\lim_{k \rightarrow \infty} E[|v_i(k)|^2] = 0$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, m$ , 即多智能体系统 (1) 和 (2) 在协议 (3) 和 (4) 的作用下实现了均方一致.

下面证明必要性.

若  $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_s$  没有有向生成树, 即联合拓扑不存在全局可达点, 则相应于每个拓扑网络的 Laplace 矩阵一定可以分解为

$$L_i = \begin{bmatrix} L_1^i & 0 & 0 \\ 0 & L_2^i & 0 \\ L_3^i & L_4^i & L_5^i \end{bmatrix},$$

这里允许对智能体重新编号, 其中  $L_1^i \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $L_2^i \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ ,  $L_5^i \in \mathbb{R}^{(2m+n-n_1-n_2) \times (2m+n-n_1-n_2)}$ ,  $L_3^i \in \mathbb{R}^{(2m+n-n_1-n_2) \times n_1}$ ,  $L_4^i \in \mathbb{R}^{(2m+n-n_1-n_2) \times n_2}$ . 不妨设  $L_1^i, L_2^i$  所对应的节点集仅包含二阶智能体, 即  $n_1 + n_2 \leq m$ , 其余情况可以类似证明.

记系统 (5) 的系统矩阵为  $\Gamma_{\sigma(k)}$ , 对  $\Gamma_{\sigma(k)}$  中的相关块作与  $L^{\sigma(k)}$  相应的分解, 有

$$\bar{L}_s^{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} \begin{smallmatrix} \bar{L}_1^{\sigma(k)} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{L}_2^{\sigma(k)} & 0 \\ \bar{L}_3^{\sigma(k)} & 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{bmatrix}, \quad A_{sf}^{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_{sf}^{\sigma(k)} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

其中  $\bar{L}_3^{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{(m-n_1-n_2) \times m}$ ,  $\bar{A}_{sf}^{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{(m-n_1-n_2) \times n}$ ,  $A_1 \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$ ,  $A_2 \in \mathbb{R}^{(m-n_1-n_2) \times (m-n_1-n_2)}$ ,  $x_s(k)^T = [x_s^1(k)^T, x_s^2(k)^T, x_s^3(k)^T]$ ,  $x_s^1(k) \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $x_s^2(k) \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $x_s^3(k) \in \mathbb{R}^{m-n_1-n_2}$ . 则基于  $L^{\sigma(k)}$  的结构,  $\Gamma_{\sigma(k)}$  可以写成如下形式:

$$\Gamma_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} I_m & TI_m & 0 \\ -T \begin{bmatrix} \bar{L}_1^{\sigma(k)} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{L}_2^{\sigma(k)} & 0 \\ \bar{L}_3^{\sigma(k)} & 0 & 0 \end{bmatrix} & [I_{n_1+n_2} - A_1 T & 0 \\ -T \bar{L}_3^{\sigma(k)} & [0 & I_{m-n_1-n_2} - A_2 T] & T \bar{A}_{sf}^{\sigma(k)} \\ TA_{fs}^{\sigma(k)} & 0 & I_n - T \bar{L}_f^{\sigma(k)} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

取初始条件  $x_s(0)^T = [a\mathbf{1}_{n_1}^T \ b\mathbf{1}_{n_2}^T \ 0]$ ,  $v_s(0) = 0$ ,  $x_f(0) = 0$  且  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$ , 则由 (8) 可知对于任意时刻  $k \in Z^+$ ,  $x_s^1(k) = a\mathbf{1}_{n_1}$ ,  $x_s^2(k) = b\mathbf{1}_{n_2}$ , 从而多智能体系统 (1) 和 (2) 在控制协议 (3) 和 (4) 之下不能实现均方一致.

**注 1** 正如文献 [30] 中的定理 2.1 指出, 利用 Borel-Cantelli 引理可以证明线性 Markov 跳变系统在均方意义下的稳定性蕴含其在几乎必然 (或依概率 1) 的意义下的稳定性, 因此对于异构多智能体系统而言, 系统实现几乎必然意义下一致的充分条件仍是多智能体网络的联合拓扑具有有向生成树.

**注 2** 对于二阶多智能体系统, 文献 [22] 利用 Markov 跳变系统的理论结果分析了系统实现均方一致的条件, 本文从异构多智能体系统本身出发, 通过恰当的变量替换, 将系统矩阵转化为随机矩阵, 然后利用非负矩阵理论分析了系统实现均方一致的条件, 因此, 本文中所采用的分析方法更能从本质上反应出系统的演化规律.

**注 3** 文献 [31] 利用 Lyapouov 方法研究了随机连接失败情形下异构多智能体系统的一致性问题. 所考虑的拓扑结构的切换本质上是 Bernoulli 过程, 而本文所研究的切换是 Markov 过程, 因此, 文献 [31] 中的模型可以看作是本文的特例. 另一方面, 文献 [31] 仅仅给出了系统实现均方一致的充分条件, 而本文给出了系统实现均方一致的充要条件, 因此, 相比文献 [31], 本文的研究结果更深刻.

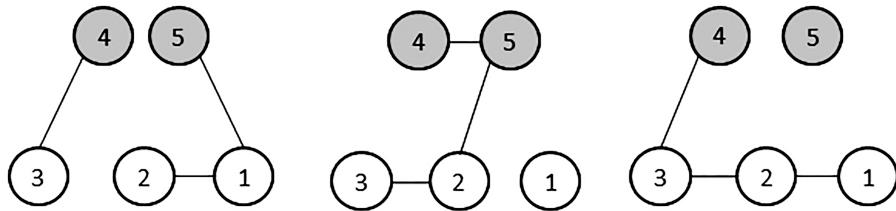


图 1 通信拓扑  
Figure 1 Communication topologies

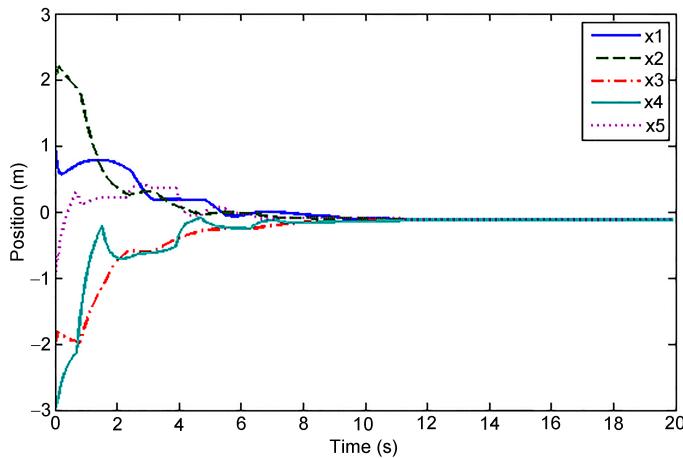


图 2 (网络版彩图) 各智能体的位置轨迹  
Figure 2 (Color online) Trajectories for positions of all agents

#### 4 数值仿真

这部分将通过 Matlab 仿真来说明上述结果的正确性. 假设  $m = 3, n = 2$ , 即由 3 个二阶智能体, 编号为 1, 2, 3; 2 个一阶智能体, 编号为 4, 5, 构成的异构多智能体系统, 拓扑结构在 3 种情况间切换, 如下图 1 所示.

其中通信拓扑间的转移概率矩阵为

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.35 & 0.25 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.35 & 0.35 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

根据定理条件,  $T$  需要满足不等式  $T < \frac{1}{m+n-1}$ , 因此可选取  $T = 0.2$ , 控制增益参数  $p_i$  需满足  $1 + \frac{1}{T} > p_i > m + n$ , 因此可选取  $A = \text{diag}\{p_1 \ p_2 \ p_3\} = \text{diag}\{5.1 \ 5.2 \ 5.3\}$ , Matlab 仿真结果如图 2 和 3, 分别为各智能体的位置和速度轨迹.

从仿真图中可以看出, 在选取满足定理条件的参数时, 系统中各智能体的位置和速度均趋于一致, 与理论结果吻合得很好.

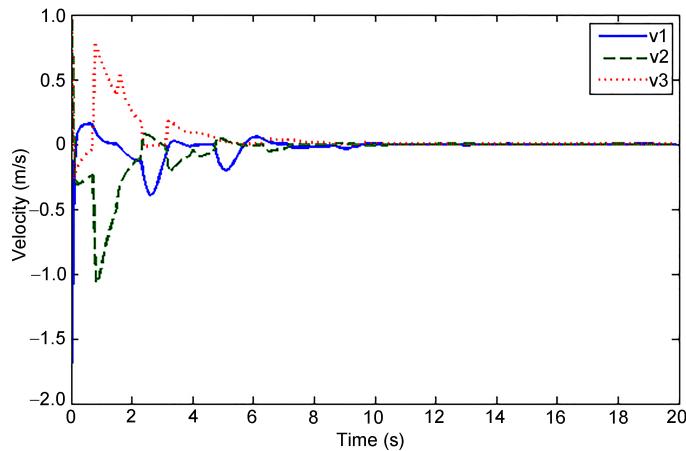


图 3 (网络版彩图) 各智能体的速度轨迹

Figure 3 (Color online) Trajectories for velocities of all agents

## 5 结论

对于由一阶智能体和二阶智能体构成的异构多智能体系统, 假设其拓扑结构为 Markov 切换网络, 本文研究了这类系统的均方一致性问题. 基于邻居信息分别设计了使系统实现均方一致的控制协议. 利用矩阵变换, 将系统系数矩阵化为非负随机不可约矩阵, 利用非负矩阵的性质, 得到了使得异构多智能体系统实现均方一致所需的充分必要条件. 接下来的工作我们将研究存在外界随机干扰的异构多智能体系统的一致性问题.

## 参考文献

- 1 Vicsek T, Czirók A, Ben-Jacob E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Phys Rev Lett*, 1995, 75: 1226–1229
- 2 Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor. *IEEE Trans Autom Contr*, 2003, 48: 988–1001
- 3 Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans Autom Contr*, 2004, 49: 1520–1533
- 4 Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Trans Autom Contr*, 2005, 50: 655–661
- 5 Lin P, Jia Y M, Li L. Distributed robust  $H_\infty$  consensus control in directed networks of agents with time-delay. *Syst Contr Lett*, 2008, 57: 643–653
- 6 Zhang W G, Qu S. Leader-following multi-agent consensus control. *J Astronaut*, 2010, 31: 2172–2176
- 7 Li T, Zhang J. Sampled-data based average consensus control for networks of continuous-time integrator agents with measurement noises. In: Proceedings of the 26th Chinese Control Conference. Beijing: Beihang University Press, 2007. 716–720
- 8 Li T, Zhang J F. Mean square average-consensus under measurement noises and fixed topologies: necessary and sufficient conditions. *Automatica*, 2009, 45: 1929–1936
- 9 Li T, Zhang J F. Sampled-data based average consensus with measurement noises: convergence analysis and uncertainty principle. *Sci China Inf Sci*, 2009, 52: 2089–2103
- 10 Cheng L, Hou Z G, Tan M. A mean square consensus protocol for linear multi-agent systems with communication noises and fixed topologies. *IEEE Trans Autom Contr*, 2014, 59: 261–267
- 11 Zheng Y, Zhu Y, Wang L. Consensus of heterogeneous multi-agent systems. *IET Contr Theory Appl*, 2011, 5: 1881–

1888

- 12 Liu C L, Liu F. Stationary consensus of heterogeneous multi-agent systems with bounded communication delays. *Automatica*, 2011, 47: 2130–2133
- 13 Zheng Y, Wang L. Distributed consensus of heterogeneous multi-agent systems with fixed and switching topologies. *Int J Contr*, 2012, 85: 1967–1976
- 14 Zheng Y, Wang L. Containment control of heterogeneous multi-agent system. *Int J Contr*, 2014, 87: 1–8
- 15 Haghshenas H, Badamchizadeh M A, Baradarannia M. Containment control of heterogeneous linear multi-agent systems. *Automatica*, 2015, 54: 210–216
- 16 Liu Y, Min H, Wang S, et al. Distributed consensus of a class of networked heterogeneous multi-agent systems. *J Franklin Inst*, 2014, 351: 1700–1716
- 17 Liu K, Ji Z, Xie G, et al. Consensus for heterogeneous multi-agent systems under fixed and switching topologies. *J Franklin Inst*, 2015, 352: 3670–3683
- 18 Geng H, Chen Z, Liu Z, et al. Consensus of a heterogeneous multi-agent system with input saturation. *Neurocomputing*, 2015, 166: 382–388
- 19 Mo L, Pan T, Guo S, et al. Distributed coordination control of first- and second-order multiagent systems with external disturbances. *Math Problems Eng*, 2015, 9: 1–7
- 20 Mo L, Niu Y, Pan T. Consensus of heterogeneous multi-agent systems with switching jointly-connected interconnection. *Phys A: Stat Mech Appl*, 2015, 427: 132–140
- 21 Tian Y, Zhang Y. High-order consensus of heterogeneous multi-agent systems with unknown communication delays. *Automatica*, 2012, 48: 1205–1212
- 22 Zhang Y, Tian Y. Consentability and protocol design of multi-agent systems with stochastic switching topology. *Automatica*, 2009, 45: 1195–1201
- 23 Wang B, Zhang J. Distributed output feedback control of Markov jump multi-agent systems. *Automatica*, 2013, 49: 1397–1402
- 24 Miao G, Li T. Mean square containment control problems of multi-agent systems under Markov switching topologies. *Adv Differ Equ*, 2015, 1: 1–10
- 25 Xie D, Cheng Y. Bounded consensus tracking for sampled-data second-order multi-agent systems with fixed and Markovian switching topology. *Int J Robust Nonlin Contr*, 2013, 25: 252–268
- 26 Lou Y C, Hong Y G. Target containment control of multi-agent systems with random switching interconnection topologies. *Automatica*, 2012, 48: 879–885
- 27 Wolfowitz J. Products of indecomposable, aperiodic, stochastic matrices. *Proc American Math Soc*, 1963, 14: 733–737
- 28 He S Y. Stochastic Process. Beijing: Beijing University Press, 2008. 145–173 [何书元. 随机过程. 北京: 北京大学出版社, 2008. 145–173]
- 29 Xu Z. Introduction to Matrix Theory. Beijing: Science Press, 2001. 158–162 [徐仲. 矩阵论简明教程. 北京: 科学出版社, 2001. 158–162]
- 30 Costa O L V, Fragoso M D, Marques R P. Discrete-Time Markov Jump Linear Systems. London: Springer-Verlag, 2005. 63–66
- 31 Kim J M, Jin B P, Choi Y H. Leaderless and leader-following consensus for heterogeneous multi-agent systems with random link failures. *IET Contr Theory Appl*, 2014, 8: 51–60

## Mean-square consensus of heterogeneous multi-agent systems under Markov switching topologies

Lipo MO\* & Tingting PAN

*School of Science, Beijing Technology and Business University, Beijing 100048, China*

\*E-mail: beihangmmp@126.com

**Abstract** This paper concerns the mean-square consensus of a heterogeneous multi-agent system, which consists of first- and second-order agents, under Markovian switching topologies. Firstly, based on information from neighboring agents, control protocols are designed for the first- and second-order agents, respectively. Secondly, by using the properties of a stochastic irreducible aperiodic matrix, the sufficient and necessary conditions for the heterogeneous multi-agent systems to realize mean-square consensus are obtained. Finally, numerical simulations are conducted to illustrate the effectiveness of the theoretical results.

**Keywords** heterogeneous, multi-agent systems, Markov switching, consensus, mean-square stability



**Lipo MO** was born in 1980. He received the Ph.D. degree in mathematics from the Beihang University, Beijing, in 2010. Currently, he is an associate professor at Beijing Technology and Business University. His research interests include stochastic systems, coordination control of multi-agent systems, and intelligent optimization algorithm.



**Tingting PAN** was born in 1989. She received the M.S. degree in statistics from the Beijing Technology and Business University, Beijing, in 2016. Her research interests include coordination control of multi-agent systems and stochastic systems.