



有界 Petri 网系统稳定性与镇定性分析的矩阵半张量积方法

韩晓光^{①②}, 陈增强^{①②③*}, 刘忠信^①, 张青^③

① 南开大学计算机与控制工程学院, 天津 300350

② 南开大学天津市智能机器人技术重点实验室, 天津 300350

③ 中国民航大学理学院, 天津 300300

* 通信作者. E-mail: chenzq@nankai.edu.cn

收稿日期: 2016-05-26; 接受日期: 2016-08-02; 网络出版日期: 2016-11-08

国家自然科学基金 (批准号: 61573199, 61573200) 和天津市自然科学基金 (批准号: 14JCYBJC18700, 13JCYBJC17400) 资助项目

摘要 基于矩阵半张量积 (semi-tensor product, STP) 方法, 本文研究了有界 Petri 网系统稳定性和镇定性问题. 首先, 在布尔代数框架下, 对先前所建立的有界 Petri 网系统的标识演化方程进行了改进. 利用改进后的这个方程, 给出了有界 Petri 网系统平衡点稳定性判别的充要条件. 其次, 为了研究有界 Petri 网系统的标识反馈镇定问题, 定义了 Petri 网系统的标识 k 步前可达性集, 并给出了它的一些基本性质. 利用这些性质, 给出了有界 Petri 网系统镇定性的判别方法, 并设计了最优标识反馈控制器的有效算法. 本文的结果是基于矩阵形式的, 利用 MATLAB 的 STP 工具箱, 可将 Petri 网系统的稳定性和镇定性判别问题转化为简单直接的矩阵计算问题. 该方法的优势不仅在于所得到的结果形式简单, 而且易于计算机实现. 最后, 实例说明了该方法的可行性和有效性.

关键词 Petri 网 离散事件动态系统 矩阵的半张量积 平衡点 稳定性 镇定性

1 引言

作为图形化和数学建模工具, Petri 网已成为离散事件动态系统建模、分析和管控的有效工具之一 [1~4], 尤其是描述和管控系统的并发、同步、冲突、不确定和随机等行为非常有效. 近 20 年来, 它受到了来自计算机领域和自控领域学者的普遍关注, 并被广泛应用于并行软件系统 [5]、柔性制造系统 [6, 7] 和系统生物学 [8] 等领域.

纵观过去的几十年, 虽然有关 Petri 网系统问题的研究取得了长足发展, 但是由于缺乏恰当的数学工具, 仍有一些基本问题有待进一步解决, 如 Petri 网系统的控制、死锁、可观性和辨识等问题. 有关这方面问题的介绍见综述文献 [9]. 最近, 一种基于精确数学模型的方法已经被用于 Petri 网系统的研究当中, 并且取得了一系列结果 [10~13]. 其基本工具是矩阵半张量积 (semi-tensor product, STP), 它

引用格式: 韩晓光, 陈增强, 刘忠信, 等. 有界 Petri 网系统稳定性与镇定性分析的矩阵半张量积方法. 中国科学: 信息科学, 2016, 46: 1542–1554, doi: 10.1360/N112016-00137

是普通矩阵乘法的推广, 由中国科学院程代展教授首次提出^[14]. 至今已形成了相当规模的应用研究领域, 包括布尔网络^[15, 16]、博弈论^[17, 18]、有限自动机^[19, 20]等.

系统的稳定性和镇定性是两个基本问题, 它是系统运行的前提条件. 当选择用 Petri 网作为系统建模工具时, 首先要考虑 Petri 网系统的稳定性. 到目前为止, 还没有发现有关 Petri 网系统的稳定性和镇定性问题的研究结果. 在文献 [12] 模型的基础上, 本文研究了有界 Petri 网系统的稳定和镇定问题.

本文的主要创新点和关键技术如下:

(1) 本文的一些概念在 Petri 网领域是第一次提出的, 包括有界 Petri 网系统的平衡点、标识 k 步前可达性集、平衡点稳定性及平衡点可镇定性等概念.

(2) 为了便于讨论有界 Petri 网系统的稳定性问题, 在布尔代数框架下, 得到了一个新的有界 Petri 网系统的标识动态演化方程 (见正式文式 (17)). 该动态方程只包含了 Petri 网系统标识演化的信息. 使用此方程, 本文得到了有界 Petri 网系统平衡点稳定性判别的充要条件.

(3) 为了研究有界 Petri 网系统的镇定性问题, 给予了有界 Petri 网系统的标识 k 步前可达性集的定义和一些基本性质. 基于这些性质, 得到了有界 Petri 网系统是否可镇定判别的充要条件.

(4) 利用有界 Petri 网系统的标识动态演化方程和标识 k 步前可达性集, 设计了计算所有最优¹⁾标识反馈控制器的有效算法. 该算法的优点在于它的计算过程只涉及简单的矩阵代数操作.

本文结构安排如下: 第 2 节介绍了本文所用到的一些基础知识, 包括基本符号、矩阵半张量积和 Petri 网的概念及相关结论. 第 3 节讨论了有界 Petri 网系统的稳定性问题. 第 4 节研究了有界 Petri 网系统的镇定性问题及最优标识反馈控制器的设计. 第 5 节为本文结论和未来研究方向.

2 预备知识

2.1 符号说明

- $|X|$ 表示集合 X 的势.
- $\mathcal{N}^+$ 表示正整数集合.
- $\mathbb{R}^n$ 表示实数域上 n 维列向量构成的集合.
- $\mathcal{M}_{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 实矩阵构成的集合.
- $M_{(i,j)}$ 表示矩阵 M 的第 i 行、第 j 列元素.
- $\text{Row}_i(M)$ 表示矩阵 M 的第 i 行.
- $\text{Col}_j(M)$ 表示矩阵 M 的第 j 列.
- $\text{Col}(L)$ 表示矩阵 L 的列构成的集合.
- $\mathcal{D} := \{0, 1\}$.
- 若 $B \in \mathcal{M}_{m \times n}$, 且满足 $B_{(i,j)} \in \mathcal{D}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, 称 B 为布尔矩阵.
- $\mathcal{B}_{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 布尔矩阵构成的集合.
- $\delta_n^0 := \underbrace{[0, 0, \dots, 0]}_n^T$.
- δ_n^k 表示单位矩阵 I_n 的第 k 列, $1 \leq k \leq n$.
- $\Delta_n := \{\delta_n^1, \delta_n^2, \dots, \delta_n^n\}; \tilde{\Delta}_n := \{\delta_n^0, \delta_n^1, \dots, \delta_n^n\}$.

1) 这里的“最优”指的是 Petri 网系统的每个标识到达平衡点的最短距离.

- 若 $L \in \mathcal{M}_{m \times n}$, 且 $\text{Col}(L) \subseteq \Delta_m$ (resp., $\text{Col}(L) \subseteq \tilde{\Delta}_m$), 称 L 为逻辑矩阵 (resp., 广义逻辑矩阵).
- $\mathcal{L}_{m \times n}$ (resp., $\tilde{\mathcal{L}}_{m \times n}$) 表示逻辑矩阵 (resp., 广义逻辑矩阵) 构成的集合. 若 $L \in \mathcal{L}_{m \times n}$ (resp., $L \in \tilde{\mathcal{L}}_{m \times n}$), 则 $L = [\delta_m^{i_1}, \delta_m^{i_2}, \dots, \delta_m^{i_n}]$, 简记为 $L = \delta_m[i_1, i_2, \dots, i_n]$, $i_k \in \{0, 1, \dots, m\}$, $1 \leq k \leq n$.
- 设 $A \in \tilde{\mathcal{L}}_{n \times m}$, $\Xi(A) := \{i | \text{Col}_i(A) \in \Delta_n\}$.
- 设 $A = (a_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{B}_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{B}_{m \times n}$, 则矩阵 $A \vee B := ((a_{ij}) \vee (b_{ij}))_{m \times n}$, $A \wedge B := ((a_{ij}) \wedge (b_{ij}))_{m \times n}$, 其中 $\vee$ 和 $\wedge$ 分别表示逻辑析取运算和合取运算.
- 设 $A \in \mathcal{B}_{m \times n}$, $\Theta(A) := \{A \in \mathcal{L}_{m \times n} | A \wedge A = A\}$. 特别地, $x \in \mathcal{B}_{m \times 1}$, $\Theta(x) := \{y \in \Delta_m | y \wedge x = y\}$.
- $\text{Row}_\Sigma(A)$ 表示布尔矩阵 A 行的布尔和.

2.2 矩阵的半张量积

本小节介绍本文所用到的矩阵半张量积的一些内容. 有关矩阵半张量积更详细的介绍见文献 [21].

定义 1 ([21]) 设 $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $B \in \mathcal{M}_{p \times q}$, 则 A 与 B 的半张量积定义如下:

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{k/n})(B \otimes I_{k/p}), \quad (1)$$

其中 $k = \text{lcm}(n, p)$ 表示 n 与 p 的最小公倍数, $\otimes$ 为矩阵的 Kronecker 积.

从定义 1 可知, 当 $n = p$ 时, 式 (1) 变为 $A \ltimes B = AB$, 即矩阵的半张量积是普通矩阵乘积的推广. 因此, 在不导致混淆情况下, 本文略去符号 “ $\ltimes$ ”.

定义 2 ([21]) 一个换位矩阵 $W_{[m,n]}$ 是一个 $mn \times mn$ 矩阵, 其定义如下:

$$W_{[m,n]} = \delta_{mn}[1, m+1, \dots, (n-1)m+1, 2, m+2, \dots, (n-1)m+2, \dots, m, 2m, \dots, nm]. \quad (2)$$

引理 1 ([21]) 设 $X \in \mathbb{R}^m$, $Y \in \mathbb{R}^n$, 则

$$W_{[m,n]}XY = YX, \quad W_{[n,m]}YX = XY. \quad (3)$$

引理 2 ([21]) 设降幂矩阵 $\Phi_n = \text{diag}[\delta_n^1, \delta_n^2, \dots, \delta_n^n]$, 则

$$X^2 = \Phi_n X, \quad \forall X \in \tilde{\Delta}_n. \quad (4)$$

2.3 Petri 网

为节省空间, 本小节只给出本文所用到的 Petri 网的一些内容. 有关 Petri 网的理论和应用更具体介绍见文献 [3,22].

一个加权 Petri 网图是一个 4 元组 $N = (P, T, F, W)$, 其中 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 表示有限库所集, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ 表示有限变迁集, $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ 表示弧/流关系集合, $P \cap T = \emptyset$ 且 $P \cup T \neq \emptyset$, $W : F \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ 为弧上的权函数. 带有初始标识/初始状态 M_0 的 Petri 网图 $N = (P, T, F, W)$ 是一个动态系统, 称为 Petri 网系统, 记为 $\langle N, M_0 \rangle$. 如果 $W : F \rightarrow \{1\}$ (即权函数 W 的函数值恒等于 1), 称其为普通 Petri 网, 简记为 $N = (P, T, F)$. 不失一般性, 本文以下部分只讨论普通 Petri 网. 方便起见, 本文中节点 $x \in P \cup T$ 的前集与后集分别记为 $\bullet x = \{y \in P \cup T | (y, x) \in F\}$ 和 $x^\bullet = \{y \in P \cup T | (x, y) \in F\}$.

一个 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 具有如下变迁发生规则: 设 $t \in T$, 若 $\forall p \in P : p \in \bullet t \rightarrow M(p) \geq W(p, t)$, 其中 $M(p)$ 表示库所 p 中的令牌数, 则称变迁 t 在标识 M 是使能的, 记为 $M[t >]$. 若 $M[t >]$, 则可得一个新的标识 M' , 使得 $M[t > M']$, 并满足 $M'(p) = M(p) - W(p, t) + W(t, p), \forall p \in P$.

对于一个 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 来说, 如果存在使能变迁序列 $\sigma = t_{j_1} t_{j_2} \dots t_{j_k} \in T^{*2}$, 使得 $M[\sigma > M'$, 则称标识 M' 是从 M 可达的. Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的可达性集记为 $R(N, M_0)$, 并约定 $M_0 \in R(N, M_0)$, 即 $R(N, M_0) = \{M \in \mathbb{R}^n | \exists \sigma \in T^* : M_0[t > M\}$. 特别地, 用 $R_k(N, M_0)$ 表示从初始标识 M_0 出发的 k 步可达性集. 这样, $R(N, M_0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k(N, M_0)$.

一个 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 是有界的当且仅当 $\langle N, M_0 \rangle$ 的所有库所都是有界的, 即 $\forall p \in P, \exists k_p \in \mathbb{N}^+$ 使得 $\forall M \in R(N, M_0)$, 有 $M(p) \leq k_p$. 一个变迁 $t \in T$ 是活的当且仅当 $\forall M \in R(N, M_0)$, 皆存在 $M' \in R(N, M)$, 使得 $M'[t >$. 如果 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的每个变迁都是活的, 称 $\langle N, M_0 \rangle$ 为活的 Petri 网系统. 为了研究 $\langle N, M_0 \rangle$ 的稳定性和镇定性问题, 假设本文讨论的 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 是活的网系统.

下面的引理来自文献 [12], 它对本文所研究的有界 Petri 网系统稳定性和镇定性问题至关重要.

引理 3 ([12]) 有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的标识动态演化过程等价地表示为如下一个双线性离散系统:

$$x(k+1) = Lu(k)x(k), \quad (5)$$

其中 $L \in \tilde{\mathcal{L}}_{s \times sm}$ 为有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的变迁-标识转移矩阵, $x(k)$ 和 $u(k)$ 分别表示 $\langle N, M_0 \rangle$ 在 k 时刻标识和变迁的向量形式, $m = |T|$, $s = |R(N, M_0)|$. 式 (5) 称为 $\langle N, M_0 \rangle$ 的标识演化方程.

3 有界 Petri 网系统的稳定性

3.1 布尔代数

定义 3 ([23]) 设 $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$, 则 α 与 β 的布尔加法和布尔乘法分别定义为

$$\alpha +_{\mathcal{B}} \beta := \alpha \vee \beta, \quad \alpha \times_{\mathcal{B}} \beta := \alpha \wedge \beta, \quad (6)$$

其中 $\vee$ 为逻辑析取运算, $\wedge$ 为逻辑合取运算.

由定义 3 知, $\{\mathcal{D}, +_{\mathcal{B}}, \times_{\mathcal{B}}\}$ 构成了一个代数, 称其为布尔代数 [23]. 这样, 在布尔代数框架下, 可以定义布尔矩阵的布尔加法和布尔乘法.

定义 4 设 $A = (a_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{B}_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{B}_{m \times n}$, 则

$$A +_{\mathcal{B}} B = (a_{ij} +_{\mathcal{B}} b_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{B}_{m \times n}. \quad (7)$$

定义 5 设 $A = (a_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{B}_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times s} \in \mathcal{B}_{n \times s}$, 则

$$A \times_{\mathcal{B}} B := C = (c_{ij})_{m \times s} \in \mathcal{B}_{m \times s}, \quad (8)$$

其中 $c_{ij} = (a_{i1} \times_{\mathcal{B}} b_{1j}) +_{\mathcal{B}} (a_{i2} \times_{\mathcal{B}} b_{2j}) +_{\mathcal{B}} \dots +_{\mathcal{B}} (a_{in} \times_{\mathcal{B}} b_{nj})$. 特别地, $A \in \mathcal{B}_{n \times n}$ 的布尔幂表示为

$$A^{(k)} := \underbrace{A \times_{\mathcal{B}} A \times_{\mathcal{B}} \dots \times_{\mathcal{B}} A}_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+. \quad (9)$$

2) T^* 表示 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 变迁序列构成的集合.

3.2 Petri 网系统的稳定性

定义 6 设 M 为有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的一个标识, 即 $M \in R(N, M_0)$. 如果存在一个使能变迁 $t \in T$, 使得 $M[t > M$. 称标识 M 为 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的一个平衡点.

定义 7 设 M_p 为有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的一个平衡点, M 是 $\langle N, M_0 \rangle$ 的一个标识. 如果从 M 出发的所有标识轨迹经有限步变迁后收敛于 M_p , 则称标识 M 在平衡点 M_p 处是稳定的. 如果 $\langle N, M_0 \rangle$ 的每一个标识在 M_p 处都是稳定的, 称 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 在平衡点 M_p 处是稳定的.

方便起见, 用 $X(M, \sigma, k)$ 表示从标识 M 出发经 k 步变迁后达到的标识集, 并约定 $X(M, \sigma, 0) = M$, 其中 σ 表示长度为 k 的使能变迁序列. 从定义 7 可知, 标识 M 在平衡点 M_p 处是稳定的当且仅当存在 $T(M) \in \mathcal{N}^+$ 使得

$$X(M, \sigma, k) = \{M_p\}, \quad \forall k \geq T(M). \quad (10)$$

用 $T_p(M)$ 表示使式 (10) 成立的最小正整数, 称 $T_p(M)$ 为标识 M 的暂态周期. 这样, 有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的暂态周期定义为

$$T_p := \max_{M \in R(N, M_0)} T_p(M). \quad (11)$$

易知, T_p 满足 $T_p < |R(N, M_0)|$.

考虑有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$, 其状态演化方程如式 (5) 所示. 从方程 (5) 很容易得到每个标识下的所有使能变迁. 若用 $\Gamma(M)$ 表示标识 M 下的所有使能变迁构成的集合, 则有如下结果.

引理 4 设有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的标识演化方程如式 (5) 所示, $M := \delta_s^i \in R(N, M_0)$ 为 $\langle N, M_0 \rangle$ 的一个标识, 且 $\Xi(LW_{[s,m]}\delta_s^i) = \{i_1, i_2, \dots, i_q\}$, 则

$$\Gamma(M) = \Gamma(\delta_s^i) = \{\delta_m^{i_1}, \delta_m^{i_2}, \dots, \delta_m^{i_q}\}, \quad (12)$$

其中 $s = |R(N, M_0)|$, $\delta_m^{i_j}$ 为变迁 t_{i_j} 的向量形式, $1 \leq j \leq q$.

事实上, $\Gamma(M)$ 表示从 M 到 2^T 的一个集合值函数, 即 $\Gamma: M \rightarrow 2^T$, 其中 2^T 表示变迁集 T 的幂集. 借助于矩阵的半张量积和引理 4, $\Gamma(M)$ 可由如下方程求得

$$\tilde{u}(k) = Hx(k), \quad (13)$$

其中 $x(k)$ 表示 k 时刻标识的向量形式, $\tilde{u}(k) = (u^1(k), u^2(k), \dots, u^m(k))^T$ 表示 k 时刻集合函数 Γ 的向量形式, 并且 $u^j(k) = 1$ 表示变迁 t_j 在标识 $x(k)$ 下是使能的, 否则 $u^j(k) = 0$. $H \in \mathcal{B}_{m \times n}$ 称为 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的使能变迁矩阵. 因此, 有如下引理.

引理 5 设有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的标识演化方程如式 (5) 所示, $M := \delta_s^i \in R(N, M_0)$ 为 $\langle N, M_0 \rangle$ 的一个标识, 则

$$\Gamma(M) = \Gamma(\delta_s^i) = \Theta(\text{Col}_i(H)), \quad 1 \leq i \leq s. \quad (14)$$

例 1 考虑图 1 所示的有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$, 初始标识 $M_0 = (1, 1, 0)^T$.

利用文献 [24] 中的算法 (见文献 [24] 中的命题 1), 可以得到图 1 所示有界 Petri 网系统的可达性集 $R(N, M_0) = \{M_0 = (1, 1, 0)^T, M_1 = (0, 2, 0)^T, M_2 = (2, 0, 0)^T, M_3 = (1, 0, 1)^T, M_4 = (0, 1, 1)^T, M_5 = (0, 0, 2)^T\}$. 令标识 $M_{i-1} \sim \delta_6^i, 1 \leq i \leq 6$; 变迁 $t_j \sim \delta_4^j, 1 \leq j \leq 4$. 由式 (5) 可以得到图 1 所示有界 Petri 网系统的标识演化方程为

$$x(k+1) = Lu(k)x(k),$$

其中 $L = \delta_6[2, 0, 1, 5, 0, 0, 3, 1, 0, 0, 4, 0, 4, 5, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 4, 5, 6]$.

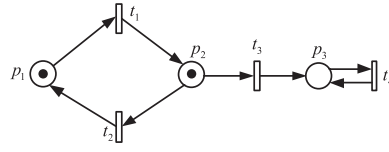


图 1 有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$
Figure 1 A bounded Petri net system

由引理 4 和式 (13), 可以得到

$$\tilde{u}(k) = Hx(k),$$

其中 H 为图 1 所示 Petri 网系统的使能变迁矩阵, 即

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

以标识 $M_4 = \delta_6^5$ 为例, 由引理 5 可知, $\Gamma(M_4) = \Theta(\text{Col}_5(H)) = \{\delta_4^2, \delta_4^3, \delta_4^4\}$, 即变迁 t_2, t_3, t_4 在标识 M_4 下是使能的.

为了得到有界 Petri 网 $\langle N, M_0 \rangle$ 的闭环系统, 不失一般性, 将式 (13) 带入式 (5). 具体地讲, 用式 (13) 中的 $\tilde{u}(k)$ 替代式 (5) 中的 $u(k)$, 即

$$x(k+1) = Lu(k)x(k) = LHx^2(k) = LH\Phi_n x(k), \quad (15)$$

其中 Φ_n 如引理 2 所示.

令 $A := LH\Phi_n$, $L = [\text{Blk}_1(L), \text{Blk}_2(L), \dots, \text{Blk}_m(L)]$, 其中 $\text{Blk}_j(L) \in \mathcal{B}_{s \times s}$ 表示矩阵 L 的第 j 个子块矩阵, $1 \leq j \leq m$. 根据矩阵 L , H 和 Φ_n 的定义, 有如下结论:

引理 6 设有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的标识演化方程如式 (5) 所示, 则

$$A = LH\Phi_n = \sum_{j=1}^m \text{Blk}_j(L), \quad (16)$$

其中 H 为 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的使能变迁矩阵.

当考虑有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 稳定性时, 并不需要知道从一个标识到另一个标识有多少条路径, 只关心标识间的可达情况. 一般情况下, 矩阵 $A = LH\Phi_n$ 并不是一个布尔矩阵. 这样, 利用方程 (15) 判别有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 稳定性并不方便. 为此, 在布尔代数框架下考虑方程 (15). 这样, 方程 (15) 变为如下方程:

$$x(k+1) = \tilde{A} \ltimes_{\mathcal{B}} x(k), \quad (17)$$

其中 $\tilde{A} := F \ltimes_{\mathcal{B}} H \ltimes_{\mathcal{B}} \Phi_n = \text{Blk}_1(L) +_{\mathcal{B}} \text{Blk}_2(L) +_{\mathcal{B}} \dots +_{\mathcal{B}} \text{Blk}_m(L)$, $x(k) = (x^1(k), x^2(k), \dots, x^n(k))^T$ 表示 k 时刻标识的向量形式, 且满足 $x^j(k) = 1$ 当且仅当初始标识经 k 步变迁序列达到标识 $M_{j-1} = \delta_n^j$, 否则, $x^j(k) = 0$. 特别地, $x(0) = (x^1(0), x^2(0), \dots, x^n(0))^T$ 为有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的初始标识.

基于方程 (17), 本文给出有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 标识可达性和平衡点稳定性的主要结果.

定理 1 设有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的标识演化方程如式 (17) 所示, 标识 $M_{i-1} = \delta_s^i \in R(N, M_0)$, 则 M_{i-1} 的 k 步可达性集为

$$R_k(N, M_{i-1}) = \Theta(\text{Col}_i(\tilde{A}^{(k)})), \quad (18)$$

其中 $\tilde{A}^{(k)}$ 表示矩阵 $\tilde{A}$ 的 k 次布尔幂.

证明 由式 (17) 可知, $(\tilde{A})_{(j,i)} = 1$ 当且仅当标识 $M_{j-1} = \delta_s^j$ 是从 $M_{i-1} = \delta_s^i$ 可达的, 即存在使能变迁 $t_{j_1} \in T$ 使得 $M_{i-1}[t_{j_1} > M_{j-1}$. 这样, 在布尔代数框架下, $(\tilde{A}^{(k)})_{(j,i)} = 1$ 当且仅当存在长度为 k 使能变迁序列 $\sigma = t_{j_1} t_{j_2} \cdots t_{j_k} \in T^*$ 使得 $M_{i-1}[\sigma > M_{j-1}$. 因此, 式 (18) 成立.

定理 2 设有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的标识演化方程如式 (17) 所示, $M_{p-1} := \delta_s^p \in R(N, M_0)$ 是 $\langle N, M_0 \rangle$ 的一个平衡点, 则

(1) 标识 $M_{i-1} = \delta_s^i$ 在 M_{p-1} 处是稳定的当且仅当

$$\text{Col}_i(\tilde{A}^{(k)}) = \delta_s^p, \quad \forall k \geq T_p(M_{i-1}), \quad (19)$$

其中 $T_p(M_{i-1})$ 为标识 M_{i-1} 的暂态周期.

(2) Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 在 M_{p-1} 处是稳定的当且仅当

$$\text{Col}(\tilde{A}^{(k)}) = \{\delta_s^p\}, \quad \forall k \geq T_p, \quad (20)$$

其中 T_p 为 $\langle N, M_0 \rangle$ 的暂态周期.

证明 由于 (2) 是 (1) 的自然推广, 因此只需证 (1) 成立即可.

事实上, 如果标识 $M_{i-1} = \delta_s^i$ 在平衡点 M_{p-1} 处是稳定的. 由式 (10) 知存在 $T_p(M_{i-1}) \in \mathcal{N}^+$ 使得 $X(M_{i-1}, \sigma, k) = \{M_{p-1}\}$, $\forall k \geq T_p(M_{i-1})$. 由定理 1 知, 标识 $M_{i-1} = \delta_s^i$ 经长度大于等于 $T_p(M_{i-1})$ 步之后的可达性集为 $\Theta(\text{Col}_i(\tilde{A}^{(k)})) = \{\delta_s^p\}$, 即式 (19) 成立. 反之, 式 (19) 成立意味着从标识 $M_{i-1} = \delta_s^i$ 出发的所有状态轨迹经有限步变迁后收敛于 M_{p-1} , 由定义 7, 标识 $M_{i-1} = \delta_s^i$ 在 M_{p-1} 处是稳定的.

例 2 从新考虑图 1 所示的有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$.

利用定理 2 判别此 Petri 网系统在平衡点 $M_5 = \delta_6^6$ 处的稳定性.

事实上, 由方程 (17), 有

$$x(k+1) = \tilde{A} \ltimes_{\mathcal{B}} x(k),$$

其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

易知, 不存在正整数 $T_6 \in [1, 6]$ 使得定理 2 中式 (20) 成立. 因此, 图 1 所示的 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 在平衡点 $M_5 = \delta_6^6$ 处是不稳定的.

4 有界 Petri 网系统的镇定性

本节主要讨论有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的标识反馈镇定问题. 在讨论之前, 先介绍有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的标识 k 步前可达性集的概念及其一些相关性质. 利用这些性质, 本文给出了有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 镇定性的判别方法和最优反馈控制器设计的有效算法.

4.1 前可达性集

定义 8 设 $M \in R(N, M_0)$ 为有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的一个标识, M 的 k 步前可达性集定义为 $\{M' \in R(N, M_0) | \exists \sigma = t_{j_1} t_{j_2} \cdots t_{j_k} \in T^* \text{ 使得 } M'[\sigma > M]\}$, 并用记号 $PR_k(N, M)$ 表示, 即

$$PR_k(N, M) = \{M' \in R(N, M_0) | \exists \sigma = t_{j_1} t_{j_2} \cdots t_{j_k} \in T^* \text{ 使得 } M'[\sigma > M]\}. \quad (21)$$

命题 1 设 $M \in R(N, M_0)$ 为有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的一个标识且满足 $M \in PR_1(N, M)$, 则

$$PR_k(N, M) \subseteq PR_{k+1}(N, M), \quad \forall k \geq 1. \quad (22)$$

证明 由于 $M \in PR_1(N, M)$, 则标识 M 为 $\langle N, M_0 \rangle$ 的一个平衡点. 这样, 根据前可达性集 $PR_k(N, M)$ 的定义, 易知式 (22) 成立.

命题 2 设 $M \in R(N, M_0)$ 为有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的一个标识.

(1) 如果 $PR_1(N, M) = \{M\}$, 则 $PR_k(N, M) = \{M\}$, $\forall k \geq 1$.

(2) 如果存在 $i \in \mathcal{N}^+$ 使得 $PR_i(N, M) = PR_{i+1}(N, M)$, 则 $PR_k(N, M) = PR_i(N, M)$, $\forall k \geq i$.

证明 (1) 显然成立. 下证 (2).

只需证明 $k = i + 2$ 时成立即可. 其他情况类似可证.

一方面, 因为 $PR_i(N, M) = PR_{i+1}(N, M)$, 则 $PR_{i+1}(N, M) \subseteq PR_{i+2}(N, M)$, 即

$$PR_i(N, M) \subseteq PR_{i+2}(N, M). \quad (23)$$

另一方面, 若标识 $M' \in PR_{i+2}(N, M)$, 则存在使能变迁序列 $\sigma = t_{j_1} t_{j_2} \cdots t_{j_i} t_{j_{i+1}} t_{j_{i+2}} \in T^*$, 使得 $M'[\sigma > M]$. 这样, 必存在两个标识 $M'' \in PR_{i+1}(N, M)$ 和 $M''' \in PR_i(N, M)$, 使得 $M''[t_{j_2} > M''']$, $M'[t_{j_1} > M'']$. 又因为 $M'' \in PR_{i+1}(N, M)$ 且 $PR_i(N, M) = PR_{i+1}(N, M)$, 则 $M'' \in PR_i(N, M)$. 这样, $M' \in PR_{i+1}(N, M)$. 因此 $M' \in PR_i(N, M)$, 即

$$PR_{i+2}(N, M) \subseteq PR_i(N, M). \quad (24)$$

由式 (23) 和 (24) 知, $PR_i(N, M) = PR_{i+2}(N, M)$ 成立.

下面的两个性质给出了计算 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 标识的 k 步前可达性集的方法.

命题 3 设有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的标识演化方程如式 (17) 所示, $M_{r-1} = \delta_s^r \in R(N, M_0)$ 为 $\langle N, M_0 \rangle$ 的一个标识, 则

$$PR_k(N, M_{r-1}) = \Theta((\text{Row}_r(\tilde{A})^{(k)})^T), \quad (25)$$

其中 $s = |R(N, M_0)|$, $\tilde{A}$ 为布尔矩阵, 其定义如式 (17) 所示.

证明 由式 (17) 可知, $(\tilde{A})_{(r,j)} = 1$ 当且仅当标识 $M_{j-1} = \delta_s^j$ 能达到标识 $M_{r-1} = \delta_s^r$. 也即存在使能变迁 $t_{j_1} \in T$ 使得 $M_{j-1}[t_{j_1} > M_{r-1}]$. 这样, 在布尔代数框架下, $((\tilde{A})^{(k)})_{(r,j)} = 1$ 当且仅当存在长度为 k 的使能变迁序列 $\sigma = t_{j_1} t_{j_2} \cdots t_{j_k} \in T^*$, 使得 $M_{j-1}[\sigma > M_{r-1}]$. 因此, 式 (25) 成立.

命题 4 设有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的标识演化方程如式 (5) 所示, $M_{r-1} = \delta_s^r \in R(N, M_0)$ 为 $\langle N, M_0 \rangle$ 的一个标识, 其中 $s = |R(N, M_0)|$, 变迁 - 标识转移矩阵 $L := \delta_s[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{ms}]$, 则

$$(1) PR_1(N, M_{r-1}) = \{\delta_s^p | \alpha_{(j-1)s+p} = r, 1 \leq j \leq m\}.$$

$$(2) PR_{k+1}(N, M_{r-1}) = \bigcup \{PR_1(N, M') | M' \in PR_k(N, M_{r-1})\}, k = 1, 2, 3, \dots$$

证明 由式 (5) 可知, $L \ltimes \delta_m^j \ltimes \delta_s^p = \delta_s^{\alpha_{(j-1)s+p}}$. 这样, $\delta_s^p \in PR_1(N, M)$ 当且仅当存在使能变迁 $t_j = \delta_m^j \in T$, 使得 $\delta_s^{\alpha_{(j-1)s+p}} = \delta_s^r$. 因此, (1) 成立.

(2) 可由定义 8 直接得到.

4.2 标识反馈镇定

考虑有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$, 其标识演化方程如式 (5) 所示. 如果 $\langle N, M_0 \rangle$ 是可镇定的, 如何寻找一个形式如 $u(k) = f(x(k))$ 所示的最优标识反馈控制器, 使得在这个控制器的作用下, Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 能被镇定到平衡点 $M \in R(N, M)$ 处, 其中控制器函数 f 是一一映射. 这样, 借助于矩阵的半张量积, 这个标识反馈控制器可表示为如下矩阵形式:

$$u(k) = Kx(k), \quad (26)$$

其中 $x(k)$ 和 $u(k)$ 分别表示 k 时刻 $x_{(k)}$ 和 $u_{(k)}$ 的向量形式. 称逻辑矩阵 $K \in \mathcal{M}_{m \times s}$ 为标识反馈矩阵, 且具有如下形式:

$$K = \delta_m[k_1, k_2, \dots, k_s], \quad (27)$$

其中 $s = |R(N, M_0)|$, $k_j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $1 \leq j \leq s$.

在标识反馈控制器 (26) 作用下, 有界 Petri 网闭环系统 $\langle N_K, M_0 \rangle$ 的动态被描述为

$$x(k+1) = LK\Phi_n x(k). \quad (28)$$

如果标识反馈矩阵 (27) 满足 $K \in \Theta(H)$, 则称反馈控制器 (26) 是允许的. 令 $F = LK\Phi_n$, 易知, 反馈控制器 (26) 是允许的当且仅当 $F = LK\Phi_n$ 是逻辑矩阵.

定义 9 设有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的标识演化方程如式 (5) 所示, $M \in R(N, M_0)$ 是 $\langle N, M_0 \rangle$ 的一个平衡点. 如果存在一个标识反馈控制器 (26), 使得闭环系统 $\langle N_K, M_0 \rangle$ 在 M 处是稳定的, 则称有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 可镇定到平衡点 M .

基于命题 3, 4 和定义 9, 下面的定理和算法分别给出了有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 镇定性的判别方法和最优反馈控制器的设计.

定理 3 设有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的标识演化方程如式 (5) 所示, $M_{p-1} := \delta_s^p \in R(N, M_0)$ 是一个平衡点, 则 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 可镇定到平衡点 M_{p-1} 当且仅当存在 $\tau \in \mathcal{N}^+(1 \leq \tau \leq s-1)$, 使得

$$PR_\tau(N, M_{p-1}) = \Delta_s, \quad (29)$$

其中 Δ_s 为 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的可达集 $R(N, M_0)$ 的向量形式, $s = |R(N, M_0)|$.

证明 由定义 7~9 易知, 必要性显然成立.

下证充分性. 假设 $PR_\tau(N, M_{p-1}) = \Delta_s$ 成立, 其中 $1 \leq \tau \leq s-1$. 由命题 3 或 4 知, Δ_s 能被表示为标识 M_{p-1} 的不相交前可达性集的并, 即

$$\begin{aligned} \Delta_s = & PR_1(N, M_{p-1}) \bigcup (PR_2(N, M_{p-1}) \setminus PR_1(N, M_{p-1})) \bigcup \dots \\ & \bigcup (PR_\tau(N, M_{p-1}) \setminus PR_{\tau-1}(N, M_{p-1})). \end{aligned} \quad (30)$$

因此, 对每一个 $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, 存在唯一的 $l_i \in [1, \tau]$, 使得 $\delta_s^i \in (PR_{l_i}(N, M_{p-1}) \setminus PR_{l_i-1}(N, M_{p-1}))$. 约定 $PR_0(N, M_{p-1}) := \phi$. 进而, 由命题 4 知, 存在正整数 $k_i \in \mathcal{N}^+(1 \leq k_i \leq m)$, 使得

$$\begin{cases} \alpha_{(k_i-1)s+i} = p, & l_i = 1, \\ \delta_s^{\alpha_{(k_i-1)s+i}} \in PR_{l_i-1}(N, M_{p-1}), & l_i \in [2, \tau]. \end{cases} \quad (31)$$

令矩阵 $K := \delta_m[k_1, k_2, \dots, k_s]$, $M_{i-1} = \delta_s^i \in \Delta_s$, 则

$$X(M_{i-1}, KM_{i-1}, 1) = L \ltimes (K\delta_n^i) \ltimes \delta_s^i = L \ltimes \delta_m^{k_i} \ltimes \delta_s^i = \delta_n^{\alpha_{(k_i-1)s+i}}.$$

于是, 当 $M_{i-1} = \delta_s^i \in PR_1(N, M_{p-1})$ 时, $X(M_{i-1}, KM_{i-1}, 1) = \delta_s^p$; 当 $M_{i-1} = \delta_s^i \in (PR_{l_i}(N, M_{p-1}) \setminus PR_{l_i-1}(N, M_{p-1}))$ ($l_i \in [2, \tau]$) 时, $X(M_{i-1}, KM_{i-1}, 1) \in PR_{l_i-1}(N, M_{p-1})$. 因此, 在标识反馈控制器 (26) 作用下, 有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 可镇定到平衡点 M_{p-1} .

事实上, 定理 3 的证明提供了计算所有最优标识反馈控制器 (26) 的方法. 将其归结为算法 1.

算法 1 有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的最优标识反馈控制器的设计

设有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 的标识演化方程如式 (5) 所示, $M_{p-1} = \delta_s^p \in R(N, M_0)$ 是 $\langle N, M_0 \rangle$ 的一个平衡点. 可采取以下步骤计算形如式 (26) 所示的所有最优标识反馈控制器, 在其作用下, Petri 网的闭环系统 $\langle N_K, M_0 \rangle$ 能够稳定到平衡点 M_{p-1} . 具体步骤如下:

- **Step 1.** 利用命题 3 或 4, 计算平衡点 M_{p-1} 的 k 步前可达性集 $PR_k(N, M_{p-1})$, 并验证是否存在正整数 $1 \leq \tau \leq s-1$, 使得 $PR_\tau(N, M_{p-1}) = \Delta_s$. 若这样的 τ 不存在, 结束此算法. 否则, 进行下一步.
- **Step 2.** 由命题 4, 将 Δ_s 表示为式 (30) 形式的不相交前可达性集的并.
- **Step 3.** 对每一个 $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, 利用公式 $\delta_s^i \in PR_{l_i}(N, M_{p-1}) \setminus PR_{l_i-1}(N, M_{p-1})$, 计算 l_i .
- **Step 4.** 利用式 (31), 计算 $k_i, i = 1, 2, \dots, s$.

这样, 可以得到所有形如式 (26) 的最优标识反馈控制器.

例 3 讨论例 1 所示的有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 在平衡点 $M_5 = \delta_6^6$ 处的镇定性.

首先, 判别此 Petri 网系统在平衡点 $M_5 = \delta_6^6$ 处是否是可镇定的.

由命题 3, 可以得到平衡点 $M_5 = \delta_6^6$ 的各步前可达性集, 即

$$\begin{aligned} PR_1(N, M_5) &= \{\delta_6^5, \delta_6^6\}, & PR_2(N, M_5) &= \{\delta_6^2, \delta_6^4, \delta_6^5, \delta_6^6\}, \\ PR_3(N, M_5) &= \{\delta_6^1, \delta_6^2, \delta_6^4, \delta_6^5, \delta_6^6\}, & PR_4(N, M_5) &= \{\delta_6^1, \delta_6^2, \delta_6^3, \delta_6^4, \delta_6^5, \delta_6^6\}. \end{aligned}$$

因此,

$$PR_4(N, M_5) = \Delta_6.$$

由定理 3 和定义 9 知, 存在形如式 (26) 所示的最优标识反馈控制器, 该控制器可使图 1 所示的有界 Petri 网系统 $\langle N, M_0 \rangle$ 镇定到平衡点 M_5 .

其次, 利用算法 1 计算所有形式为式 (26) 所示的最优标识反馈控制器.

事实上, 根据式 (26), 将 Δ_6 表示为平衡点 M_5 的不相交前可达性集的并, 即

$$\begin{aligned} \Delta_6 &= PR_1(N, M_5) \bigcup (PR_2(N, M_5) \setminus PR_1(N, M_5)) \\ &\quad \bigcup (PR_3(N, M_5) \setminus PR_2(N, M_5)) \bigcup (PR_4(N, M_5) \setminus PR_3(N, M_5)), \end{aligned}$$

其中

$$PR_1(N, M_5) = \{\delta_6^5, \delta_6^6\}, \quad PR_2(N, M_5) \setminus PR_1(N, M_5) = \{\delta_6^2, \delta_6^4\},$$

$$PR_3(N, M) \setminus PR_2(N, M) = \{\delta_6^1\}, \quad PR_4(N, M) \setminus PR_3(N, M) = \{\delta_6^3\}.$$

对每一个 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 由式 $\delta_6^i \in PR_{l_i}(N, M_5) \setminus PR_{l_i-1}(N, M_5)$, 可得到 $l_1 = 3, l_2 = l_4 = 2, l_3 = 4, l_5 = l_6 = 1$. 利用式 (31), 经计算可得 $k_1 = 1, 3; k_2 = 3; k_3 = 1; k_4 = 1; k_5 = 3; k_6 = 4$. 因此, 所有的最优标识反馈控制器为

$$u(k) = K_i x(k), \quad (32)$$

其中 $K_1 = \delta_4[1, 3, 1, 1, 3, 4], K_2 = \delta_4[3, 3, 1, 1, 3, 4]$.

值得指出的是, 本文所有实例的数值演算皆是通过 MATLAB 的 STP 工具箱完成的. 关于 STP 数值计算的详细介绍见 <http://lsc.amss.ac.cn/~dcheng/stp/STP.zip>.

5 结论与展望

本文研究了有界 Petri 网系统的平衡点稳定性和镇定性问题. 基于矩阵的半张量积方法, 分别给出了有界 Petri 网系统的平衡点稳定性和镇定性的判别方法. 同时, 设计了最优标识反馈控制器的有效算法. 几个实例验证了本文所得结果的可行性和有效性.

本文所建立的基于矩阵代数的框架只是相关工作的开始. 未来的工作将集中在如何利用本文所提出的方法研究有界 Petri 网系统的集合稳定性、集合镇定性以及拓扑结构等问题上. 此外, 带有输出的有界 Petri 网系统的镇定问题也是一个有趣的课题.

参考文献

- 1 Cassandras C G, Lafortune S. Introduction to Discrete Event Systems. 2nd ed. New York: Springer, 2008
- 2 Peterson J L. Petri Net Theory and the Modeling of Systems. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1981
- 3 Murata T. Petri nets: properties, analysis and applications. Proc IEEE, 1989, 77: 541–580
- 4 Giua A, Seatzu C. Petri nets for the control of discrete event systems. Softw Syst Model, 2015, 14: 693–701
- 5 Notomi M, Murata T. Hierarchical reachability graph of bounded Petri nets for concurrent-software analysis. IEEE Trans Softw Eng, 1994, 20: 325–336
- 6 Ezpeleta J, Colom J M, Martinez J. A Petri net-based deadlock prevention policy for flexible manufacturing systems. IEEE Trans Robot Automat, 1995, 11: 173–184
- 7 Li Z W, Zhou M C. Elementary siphons of Petri nets and their applications to deadlock prevention in flexible manufacturing systems. IEEE Trans Syst, Man, Cybern A, Syst, Humans, 2004, 34: 38–51
- 8 Steggles L, Banks R, Shaw O, et al. Qualitatively modeling and analyzing genetic regulatory networks: a Petri net approach. Bioinformatics, 2007, 23: 336–343
- 9 Giua A, Seatzu C. A systems theory view of Petri nets. In: Advances in Control Theory and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2007. 99–127
- 10 Han X G, Chen Z Q, Zhang K Z, et al. Modeling and reachability analysis of a class of Petri nets via semi-tensor product of matrices. In: Proceedings of the 34th Chinese Control Conference, Hangzhou, 2015. 6586–6591
- 11 Han X G, Chen Z Q, Liu Z X, et al. Calculation of siphons and minimal siphons in Petri nets based on semi-tensor product of matrices. IEEE Trans Syst, Man, Cybern, Syst, in press. doi: 10.1109/TSMC.2015.2507162
- 12 Han X G, Chen Z Q, Liu Z X, et al. STP-based judgment method of reversibility and liveness of bounded Petri nets. J Syst Sci Math Sci, 2016, 36: 361–370 [韩晓光, 陈增强, 刘忠信, 等. 有界 Petri 网的可逆性和活性的 STP 判别方法. 系统科学与数学, 2016, 36: 361–370]
- 13 Han X G, Chen Z Q, Zhang K Z, et al. Calculating basis siphons of Petri nets based on semi-tensor product of matrices. In: Proceedings of the 35th Chinese Control Conference, Chengdu, 2016. 2331–2336
- 14 Cheng D Z. Semi-tensor product of matrices and its application to Morgan's problem. Sci China Ser F-Inf Sci, 2001, 44: 195–212

- 15 Song J L, Li Z Q. Partial state stability and stabilization of Boolean control networks. *Sci Sin Inform*, 2015, 45: 1389–1401 [宋金利, 李志强. 布尔控制网络部分状态变量的稳定与镇定. *中国科学: 信息科学*, 2015, 45: 1389–1401]
- 16 Zhang L J, Zhang K Z. Controllability of time-variant Boolean control networks and its application to Boolean control networks with finite memories. *Sci China Inf Sci*, 2013, 56: 108201
- 17 Cheng D Z. On finite potential games. *Automatica*, 2014, 50: 1793–1801
- 18 Cheng D Z, He F H, Qi H S, et al. Modeling, analysis and control of networked evolutionary games. *IEEE Trans Autom Contr*, 2015, 60: 2402–2415
- 19 Xu X R, Hong Y G. Matrix expression and reachability analysis of finite automata. *J Contr Theory Appl*, 2012, 10: 210–215
- 20 Xu X R, Hong Y G. Matrix approach to model matching of asynchronous sequential machines. *IEEE Trans Autom Contr*, 2013, 58: 2974–2979
- 21 Cheng D Z, Qi H S, Zhao Y. *An Introduction to Semi-Tensor Product of Matrices and its Applications*. Singapore: World Scientific, 2012
- 22 Wu Z H. *Introduction to Petri Nets*. Beijing: China Machine Press, 2006 [吴哲辉. *Petri 网导论*. 北京: 机械工业出版社, 2006]
- 23 Ross K A, Wright C R B. *Discrete Mathematics*. 5th ed. New York: Prentice Hall, Inc, 2003
- 24 Wu Z H. Analysis and implementation of liveness and fairness of bounded Petri nets. *Chinese J Comput*, 1989, 12: 267–278 [吴哲辉. 有界 Petri 网的活性和公平性的分析与实现. *计算机学报*, 1989, 12: 267–278]

Semi-tensor product of matrices approach to stability and stabilization analysis of bounded Petri net systems

Xiaoguang HAN^{1,2}, Zengqiang CHEN^{1,2,3*}, Zhongxin LIU¹ & Qing ZHANG³

1 *College of Computer and Control Engineering, Nankai University, Tianjin 300350, China;*

2 *Key Laboratory of Intelligent Robotics of Tianjin, Nankai University, Tianjin 300350, China;*

3 *College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China*

*E-mail: chenzq@nankai.edu.cn

Abstract In this paper, we investigate the problems of stability and stabilization for bounded Petri net systems (BPNSs) by using the semi-tensor product (STP) of matrices. First, a new matrix equation, under the framework of Boolean algebra, is established, and is based on our previous results presented on the marking evolution equation of BPNSs. This equation made it possible to provide the necessary and sufficient condition for the equilibrium point stability of BPNSs. Second, the problem associated with marking feedback stabilizability is solved by introducing the concept and some properties of the marking pre-reachability set of BPNSs, respectively. By resorting to these properties, the necessary and sufficient condition for equilibrium point stabilization is presented. In addition, a design procedure is proposed to find all the optimal marking feedback controllers that implement the minimal length trajectories from each marking to the equilibrium point. The proposed results, in this paper, are based on the matrix form, thus the problems of verifying the stability and stabilization of BPNSs are expressed in the matrix computation. This is very simple and straightforward work by means of the MATLAB toolbox of the STP of matrices. The proposed results are of a very simple form and can conveniently be implemented on a computer. Finally, several examples are presented to illustrate the validity and application of the proposed approaches.

Keywords Petri nets, discrete event dynamic systems, semi-tensor product of matrices, equilibrium point, stability, stabilization



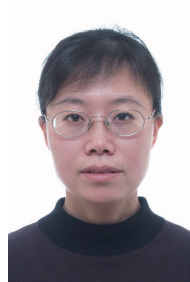
Xiaoguang HAN was born in 1984. He received the M.S. degree in applied mathematics from the College of Science, Harbin Engineering University, Harbin, in 2009. Currently, he is a doctoral student at the College of Computer and Control Engineering, Nankai University, Tianjin. His research interests include discrete-event dynamic systems, Petri nets, and automata.



Zengqiang CHEN was born in 1964. He received the Ph.D. degree in control theory and control engineering from the College of Computer and Control Engineering, Nankai University, Tianjin, in 1997. Currently, he is a professor at the College of Computer and Control Engineering, Nankai University, Tianjin. His research interests include multi-agent systems, discrete-event dynamic systems, Petri nets, and automata.



Zhongxin LIU was born in 1975. He received the Ph.D. degree in control theory and control engineering from the College of Computer and Control Engineering, Nankai University, Tianjin, in 2002. Currently, he is a professor at the College of Computer and Control Engineering, Nankai University, Tianjin. His research interests include multi-agent systems and complex networks.



Qing ZHANG was born in 1965. She received the M.S. degree in control theory and control engineering from the College of Computer and Control Engineering, Nankai University, Tianjin, in 2005. Currently, she is a professor at the Civil Aviation University of China, Tianjin. Her research interests include multi-agent systems, chaotic systems, and complex networks.