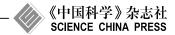
SCIENTIA SINICA Informationis





# 环形拓扑的网络化极大 – 加系统的捷径与周期性能

郭孟然<sup>©2</sup>,陶跃钢<sup>©\*</sup>,蔡炳苓<sup>©</sup>,张子龙<sup>©3</sup>

- ① 河北师范大学数学与信息科学学院, 石家庄 050024
- ② 河北工业大学控制科学与工程学院, 天津 300130
- ③ 河北省计算数学与应用重点实验室, 石家庄 050024
- \* 通信作者. E-mail: yuegangtao@hebut.edu.cn

收稿日期: 2015-07-13;接受日期: 2015-08-21; 网络出版日期: 2016-01-22 国家自然科学基金 (批准号: 60774007, 61305101, 11271108) 和河北师范大学青年基金 (批准号: L2012Q01) 资助项目

摘要 研究环形拓扑的网络化极大 – 加系统在添加捷径后周期长度和周期时间的特性. 给出系统添加 k 条起始点相同的捷径后周期长度为 1 的概率的一个下界表达式和周期时间不变的一个充分必要条件,发现两个维数分别为素数与其方幂的系统添加捷径后周期长度为 1 的概率的下界是一致的. 讨论系统添加起始点不相同的捷径的若干特殊情形,给出系统添加 k 条互不相交的捷径后周期长度为 1 的概率的一个下界表达式. 所用的代数与组合方法具有构造性. 由此给出检验系统添加 k 条起始点相同的捷径后周期时间保持不变的算法,并证明这一算法是多项式算法. 同时还给出一个关于周期长度的数值例子.

关键词 极大 – 加系统 环形拓扑 网络化系统 捷径 周期时间 周期长度

#### 1 引言

随着互联网等网络化系统的规模不断扩大, 网络化动态系统的研究迅速掀起. 对于节点为连续状态和节点具有机动能力的网络化连续时间动态系统, 控制科学研究者进行了较为深入的研究, 获得了许多重要的结果, 例如文献 [1~8]. 对于节点具有逻辑状态、通过事件触发机制驱动系统演化的网络化离散事件动态系统, 由于状态变化的非连续、并发、异步、不确定等特性, 相对于由微分方程或差分方程描述的网络化连续时间动态系统而言, 建模和分析方法无论在形式的简明性上还是在计算的可行性上都有着很大的不同. 近几年来, 网络化极大 – 加动态系统的研究正在逐渐展开. 2011 年, 文献 [9] 研究了具有环形拓扑的网络化极大 – 加动态系统在添加捷径后时序性能的变化问题, 给出了添加1条、2条和3条捷径后系统周期长度为1的概率分布, 以及添加1条捷径后系统周期时间不变的判别条件. 2012 年, 文献 [10] 研究了网络化时间事件图, 给出了一类网络时间事件图时间不变的极大 – 加代数表示, 并以此分析网络时间事件图的性能.

引用格式: 郭孟然, 陶跃钢, 蔡炳苓, 等. 环形拓扑的网络化极大 – 加系统的捷径与周期性能. 中国科学: 信息科学, 2016, 46: 228-243, doi: 10.1360/N112015-00154

1985 年, Cohen 等运用极大代数理论 [11] 把柔性制造系统中一类基于时间 – 逻辑规则严重非线性的系统模型转化为极大 – 加代数上的线性极大 – 加系统模型,其形式非常类同于传统的离散时间线性连续变量动态系统 [12]. 二十多年来, 在极大 – 加系统的周期性、稳定性、能控性、能观测性、镇定性、鲁棒性、可预测性等诸多方面, 人们作了系统深入的研究, 建立了平行于传统的线性系统理论的线性极大 – 加系统理论 [13,14]. 例如, 对于具有输入和输出的非自治极大 – 加系统, 文献 [12] 研究了能控性 (能达性)、能观测性、镇定性, 进一步地, 文献 [15,16] 研究了分别能达性和上限能观性, 文献 [17] 研究了周期时间的可配置性. 对于自治极大 – 加系统, 文献 [18,19] 分别给出了关于周期时间的谱的理论 [20]; 文献 [21,22] 把极大 – 加系统周期时间的谱理论拓展到较为一般的情形; 文献 [23] 研究了系统的鲁棒性、扰动性、动态规划, 给出了极大 – 极小控制问题不确定的 MPL 系统的解决方案; 文献 [9] 研究了添加捷径对系统周期性能的影响; 文献 [24] 研究了不同的切换操作模式, 指出可以运用线性规划算法解决优化问题, 同时讨论了系统的两个等价描述, 并证明切换极大 – 加系统可以表示成分段仿射系统.

周期长度和周期时间是极大—加动态系统的两个重要的性能指标. 本文研究具有环形拓扑的网络化极大—加动态系统在添加 k 条捷径后周期长度为 1 的概率和周期时间的不变性, 希望把文献 [9] 的主要结果拓展到较为一般的情形. 在本文余下的部分里, 首先给出系统添加 k 条起始点相同的捷径后周期长度为 1 的概率的一个下界表达式和周期时间不变的一个充分必要条件; 然后提出计算周期时间的一个多项式算法, 列举一个关于维数分别为素数与其方幂的系统添加捷径后周期长度为 1 的概率的下界一致的数值例子; 最后给出若干添加起始点不相同捷径情形的周期长度为 1 的概率的下界表达式和周期时间不变的充分必要条件, 特别是添加 k 条互不相交的捷径后周期长度为 1 的概率的一个下界表达式.

#### 2 基本概念

 $\mathbb{R}$  为实数集. 在  $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$  上定义二元运算  $\oplus$  和  $\otimes$ , 其中  $\oplus$  为  $\max$  运算,  $\otimes$  为 + 运算.  $\mathbb{R}_{\max}$  构成一个  $\oplus$  幂等代数, 称为极大 – 加代数, 其中  $\varepsilon$  为零元, 0 是单位元. 极大 – 加代数上 n 阶矩阵 A 的前趋图是一个赋权有向图, 记作 G(A), 即 G(A) 有 n 个结点  $1,2,\ldots,n$ , 当  $a_{ij} \neq \varepsilon$  时, 从结点 j 到结点 i 有一条权重为  $a_{ij}$  的有向边; 当  $a_{ij} = \varepsilon$  时, 没有从结点 j 到结点 i 的有向边. G(A) 中的道路是指一个结点序列  $i_1,i_2,\ldots,i_p$ , 其中  $i_1$  是初始结点,  $i_2$  是最终结点. 对于一个图的任意结点  $i_1$  和  $i_2$  和果存在一条  $i_1$  到  $i_2$  的道路, 且存在一条  $i_1$  到  $i_2$  的道路, 则称此图为强连通的. 极大强连通子图的周期长度是其子图中所有回路的长度的最大公因数. G(A) 的周期长度是其所有极大强连通子图的周期长度的最小公倍数.  $i_1$  的周期时间是前趋图中所有回路均值的极大值 (极大回路均值), 即图中极大回路的所有弧的权重之和除以此回路的长度. 系统  $i_1$  是算子:  $i_2$  是第统的输出, 且满足

$$S(\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} u_i) = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} S(u_i),$$

其中  $\{u_i\}_{i\in\mathcal{I}}$  是任意有限集或无限集,  $\mathcal{I}$  是指标集. 系统 S 称为极大 – 加系统. 在极大 – 加代数中, 方阵集和其前趋图集之间存在一一对应关系. 在实际应用中, 极大 – 加系统所对应的方阵是非退化的, 即对于任意 i, 存在 j 使  $a_{ij} \neq \varepsilon$ . 有关这些概念的更为详细的叙述可见文献 [11,13,14].

环形拓扑的网络化极大 - 加系统的状态方程为

$$x(k+1) = A_0 \otimes x(k), \tag{1}$$

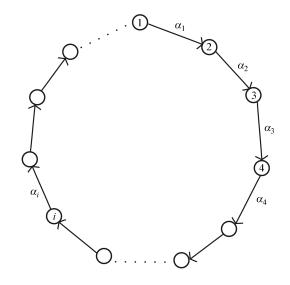


图 1 系统矩阵  $A_0$  的前趋图

**Figure 1** The precedence graph of system matrix  $A_0$ 

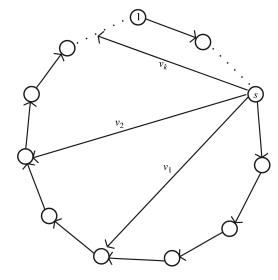


图 2 添加 k 条起始点相同的捷径

Figure 2 Adding k shortcuts with the same starting point

其中

$$A_{0} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \varepsilon & a_{0} \\ a_{1} & \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & a_{2} & \varepsilon & \cdots & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \cdots & a_{n-1} & \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$(2)$$

 $x(\cdot)$  为 n 维列向量. 为叙述方便起见, 上述系统记为  $S_0$ . 系统矩阵  $A_0$  的前趋图如图 1 所示.

显然地, 系统  $S_0$  的周期长度为 n. 对于系统  $S_0$ , 在起始点相同的情形下, 随机添加 k 条捷径, 如图 2 所示, 其中有向边  $v_1, v_2, \ldots, v_k$  分别表示随机添加的 k 条捷径. 由图 2 可以看出, 当 n=1,2 时, 添加的捷径是平凡的. 当 n=3 时, 系统最多可添加 1 条捷径; 当 n=4 时, 最多可添加两条捷径. 一般地, 当上述系统的边数  $n \ge 3$  时, 系统最多添加捷径的条数  $k \le n-2$ . 当 k=1,2,3 时, 文献 [9] 研究了捷径对系统周期长度和周期时间的影响. 本文考虑  $n \ge 3$  时, 随机添加 k 条捷径对系统周期长度和周期时间的影响.

### 3 周期长度为 1 的概率

在给出本节的主要结果之前, 先给出系统  $S_0$  的周期长度为 1 的概率的定义.

由图 2 可以看出, 对于系统  $S_0$ , 在起始点相同的条件下, 随机添加 k 条捷径后, 系统产生了 k 个新回路, 其长度分别记为  $r_1, r_2, \ldots, r_k$ .  $(r_1, r_2, \ldots, r_k, n) = 1$  表示  $r_1, r_2, \ldots, r_k, n$  的最大公因数为 1.

**定义 1** 事件  $(r_1, r_2, ..., r_k, n) = 1$  发生可能性的大小称为周期长度为 1 的概率, 记为  $P_k$ .

定理 1 设  $\varphi(n)$  是 n 的 Euler 函数, 则

$$P_k \geqslant 1 - \left(1 - \frac{\varphi(n)}{n}\right)^k. \tag{3}$$

**证明** 对 k 进行归纳. 当 k=1 时,由于系统添加 1 条捷径后仅产生了一个新回路,记此回路的长度为 r,因此系统的周期长度为 (r,n).从而系统周期长度为 1 当且仅当 r 与 n 互质.如果所添加的捷径以结点 1 为起始点,而末端点等概率地从1, 2, ..., n中选取,那么 r 在1, 2, ..., n上是均匀分布的.从而 r 的选取有  $\varphi(n)$  种方式,所以

$$P_1 = \frac{\varphi(n)}{n} = 1 - \left(1 - \frac{\varphi(n)}{n}\right)^1.$$

当 k=2 时,系统产生了两个新回路,它们的长度分别记为  $r_1,r_2$ . 系统周期长度为 1 当且仅当  $(r_1,r_2,n)=1$ . 而  $(r_1,n)=1$  或  $(r_2,n)=1$  必有  $(r_1,r_2,n)=1$ . 由此可知

$$P_2 \geqslant \frac{\varphi(n)}{n} + \frac{\varphi(n)}{n} - \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{\varphi(n)}{n}\right)^2.$$

归纳假定添加少于 k 条捷径时定理成立. 现在考虑添加 k 条捷径的情形. 新产生的回路的长度分别记为  $r_1, r_2, \ldots, r_k$ . 系统周期长度为 1 当且仅当  $(r_1, r_2, \ldots, r_k, n) = 1$ . 由归纳法, 从  $(r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}, n) = 1$  或  $(r_k, n) = 1$  可知  $(r_1, r_2, \ldots, r_k, n) = 1$ . 从而

$$\begin{split} P_k &\geqslant P_{k-1} + \frac{\varphi(n)}{n} - P_{k-1} \bigg( \frac{\varphi(n)}{n} \bigg) \\ &= \bigg( 1 - \frac{\varphi(n)}{n} \bigg) P_{k-1} + \frac{\varphi(n)}{n} \\ &\geqslant \bigg( 1 - \frac{\varphi(n)}{n} \bigg) \bigg( 1 - \bigg( 1 - \frac{\varphi(n)}{n} \bigg)^{k-1} \bigg) + \frac{\varphi(n)}{n} \\ &= 1 - \bigg( 1 - \frac{\varphi(n)}{n} \bigg)^k. \end{split}$$

即定理对于添加 k 条捷径成立. 证毕.

由定理 1 立即可以得到下面的推论.

**推论 1** 如果系统  $S_0$  随机添加 1 条捷径, 并以结点 1 为起始点, 末端点为  $i(1 \le i \le n)$ , 则周期 长度为 1 的概率为  $\varphi(n)/n$ .

推论 1 是文献 [9] 的定理 3.1. 当 n 为素数时,  $\varphi(n) = n - 1$ . 代入 (3) 式可以得到下面的推论.

推论 2 设 n 为素数, 系统  $S_0$  随机添加 k 条捷径, 则周期长度为 1 的概率为

$$P_k \geqslant 1 - \frac{1}{n^k}$$
.

**推论 3** 设  $n=q^r$ , 其中 q 为素数, r 为正整数, 系统  $S_0$  随机添加 k 条捷径, 则周期长度为 1 的概率为

$$P_k \geqslant 1 - \frac{1}{q^k}.$$

证明 因为  $n = q^r$ , 所以 Euler 函数  $\varphi(n) = q^r - q^{r-1}$ . 于是由定理 1 可知

$$P \geqslant 1 - \left(1 - \frac{\varphi(n)}{n}\right)^k = 1 - \frac{1}{q^k}.$$

证毕.

不等式 (3) 给出了系统周期长度为 1 的概率  $P_k$  的一个下界. 由不等式 (3) 容易看出, 要使等号成立当且仅当添加的捷径数为 1. 当 n 为素数时,  $P_k$  的下界随添加捷径的条数 k 的增加而增大, 且当 k=n-2 时取最大值. 由推论 2 和 3 可以得出一个有趣的结果: 维数为素数 q 和维数为  $q^r(r)$  为正整数)的系统, 分别添加 k 条捷径后其周期长度为 1 的概率的下界相同.

对于系统随机添加 1 条捷径的情形, 文献 [9] 给出了系统周期长度的估值和当 n 充分大时系统周期长度为 1 的概率. 在起始点相同的条件下, 系统随机添加 k 条捷径, 其周期长度为 1 的概率  $P_k$  满足关于 Euler 函数  $\varphi(n)$  的不等式 (3). 对这一不等式的深入解析, 需要  $\varphi(n)$  的值分布理论 [25].

#### 4 周期时间的不变性

**定义 2** 如果系统  $S_0$  在随机添加 k 条捷径后, 所得系统的周期时间与原系统的周期时间相同, 则称系统的周期时间对于添加 k 条捷径保持不变.

在给出系统  $S_0$  随机添加 k 条起始点相同的捷径后周期时间保持不变的特征性质之前, 先证明下面的引理.

**引理 1** 如果对系统  $S_0$  随机添加 k 条起始点相同的捷径  $i_1 \to s_1$ ,  $i_1 \to s_2$ , ...,  $i_1 \to s_k$ , 其中  $i_1 < s_k$ ,  $1 \le t \le k$ , 对应的权重分别为  $c_1, c_2, \ldots, c_k$ , 则系统的周期时间为

$$\lambda' = \max\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{n}, \frac{\sum_{j=1}^{i_1-1} a_j + c_1 + \sum_{j=s_1}^{n} a_j}{n+1 - (s_1 - i_1)}, \dots, \frac{\sum_{j=1}^{i_1-1} a_j + c_k + \sum_{j=s_k}^{n} a_j}{n+1 - (s_k - i_1)}\right). \tag{4}$$

证明 当添加 1 条捷径  $i_1 \rightarrow s_t$ , 对应的权重为  $c_t$  时, 由周期时间的定义可知, 系统周期时间为

$$\lambda' = \max\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{n}, \frac{\sum_{j=1}^{i_1-1} a_j + c_t + \sum_{j=s_t}^{n} a_j}{n+1 - (s_t - i_1)}\right).$$

因此, 添加 k 条捷径  $i_1 \rightarrow s_1$ ,  $i_1 \rightarrow s_2$ , ...,  $i_1 \rightarrow s_k$  后, 系统周期时间即为 (4) 式. 证毕.

定理 2 系统  $S_0$  随机添加 k 条起始点相同的捷径后周期时间不变的充分必要条件为

$$c_t \leqslant \frac{n\sum_{j=i_1}^{s_t-1} a_j - (s_t - 1 - i_1)\sum_{j=1}^n a_j}{n},$$

其中  $1 \leq t \leq k$ .

证明 必要性. 在系统添加 k 条捷径后, 要使周期时间保持不变, 必需

$$\begin{split} \frac{\sum_{j=1}^{i_1-1} a_j + c_t + \sum_{j=s_t}^n a_j}{n} &\leqslant \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n}, \\ \sum_{j=1}^{i_1-1} a_j + c_t + \sum_{j=s_t}^n a_j &\leqslant \frac{(n+1-(s_t-i_1))\sum_{j=1}^n a_j}{n}, \\ c_t &\leqslant \frac{(n+1-(s_t-i_1))\sum_{j=1}^n a_j - \sum_{j=1}^{i_1-1} a_j - \sum_{j=s_t}^n a_j}{n} \\ &= \frac{(n+1-(s_t-i_1))\sum_{j=1}^n a_j - n\sum_{j=1}^{i_1-1} a_j - n\sum_{j=s_t}^n a_j}{n} \\ &= \frac{(n+1-(s_t-i_1))(\sum_{j=1}^{i_1-1} a_j + \sum_{j=i_1}^{s_t-1} a_j + \sum_{s_t}^n) - n\sum_{j=1}^{i_1-1} a_j - n\sum_{j=s_t}^n a_j}{n} \\ &= \frac{n\sum_{j=i_1}^{s_t-1} a_j - (s_t-1-i_1)\sum_{j=1}^n a_j}{n}. \end{split}$$

充分性. 将

$$c_t \leqslant \frac{n \sum_{j=i_1}^{s_t-1} a_j - (s_t - 1 - i_1) \sum_{j=1}^n a_j}{n}$$

代入到

$$\frac{\sum_{j=1}^{i_1-1} a_j + c_t + \sum_{j=s_t}^{n} a_j}{n+1 - (s_t - i_1)}$$

中即可得到

$$\frac{\sum_{j=1}^{i_1-1} a_j + c_t + \sum_{j=s_t}^n a_j}{n+1 - (s_t - i_1)} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n}.$$

证毕.

定理 2 拓展了文献 [9] 的定理 3.5.

#### 5 算法与数值例子

判定系统 S<sub>0</sub> 随机添加 k 条起始点相同的捷径后周期时间保持不变的算法:

第 1 步 在起始点相同的条件下, 系统  $S_0$  添加 k 条捷径  $i_1 \to s_1$ ,  $i_1 \to s_2$ , ...,  $i_1 \to s_k$ , 其中  $i_1 < s_t$ ,  $1 \le t \le k$ , 对应的权重分别为  $c_1, c_2, \ldots, c_k$ .

**第2步** 因为添加的捷径的起始点相同, 所以每个新回路中只含有一条捷径. 这时系统中产生了k个新回路, 其长度分别为  $n+1-(s_1-i_1), n+1-(s_2-i_1), ..., n+1-(s_k-i_1)$ . 因为所有新回路的权重分别为

$$\sum_{i=1}^{i_1-1} a_i + c_1 + \sum_{i=s_1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{i_1-1} a_i + c_2 + \sum_{i=s_2}^{n} a_i, \dots, \sum_{i=1}^{i_1-1} a_i + c_k + \sum_{i=s_k}^{n} a_i,$$

所以新回路的均值分别为

$$\frac{\sum_{j=1}^{i_1-1} a_j + c_1 + \sum_{j=s_1}^n a_j}{n+1-(s_1-i_1)}, \frac{\sum_{j=1}^{i_1-1} a_j + c_2 + \sum_{j=s_2}^n a_j}{n+1-(s_2-i_1)}, \dots, \frac{\sum_{j=1}^{i_1-1} a_j + c_k + \sum_{j=s_k}^n a_j}{n+1-(s_k-i_1)}.$$

从而添加捷径后的周期时间为

$$\lambda' = \max\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{n}, \frac{\sum_{j=1}^{i_1-1} a_j + c_1 + \sum_{j=s_1}^{n} a_j}{n+1 - (s_1 - i_1)}, \dots, \frac{\sum_{j=1}^{i_1-1} a_j + c_k + \sum_{j=s_k}^{n} a_j}{n+1 - (s_k - i_1)}\right).$$

第3步 系统的周期时间保持不变当且仅当每个新回路的均值不超过原系统的周期时间,即

$$\frac{\sum_{j=1}^{i_1-1} a_j + c_t + \sum_{j=s_t}^n a_j}{n+1 - (s_t - i_1)} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n},$$

其中  $1 \leq t \leq k$ .

第4步 解不等式

$$\frac{\sum_{j=1}^{i_1-1} a_j + c_t + \sum_{j=s_t}^n a_j}{n+1 - (s_t - i_1)} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n}$$

得到系统周期时间不变的充分必要条件为

$$c_t \leqslant \frac{n\sum_{j=i_1}^{s_t-1} a_j - (s_t - 1 - i_1)\sum_{j=1}^n a_j}{n},$$

其中  $1 \leq t \leq k$ .

**定理 3** 对系统  $S_0$  随机添加 k 条起始点相同的捷径, 判定其周期时间不变有多项式算法.

证明 由第 2 步可以看出, 计算原回路的权重进行了 n-1 次运算, 第 n 次运算后得出周期时间. 计算添加 k 条捷径后的新回路的长度的次数均为 3, 得到新回路权重的运算次数分别为  $n-s_1+i_1$ ,  $n-s_2+i_1$ , ...,  $n-s_k+i_1$ , 从而计算新回路的均值分别进行了  $n-s_1+i_1+4$ ,  $n-s_2+i_1+4$ , ...,  $n-s_k+i_1+4$  次运算. 由第 3 步可知, 要使周期时间保持不变还要进行 k 次比较运算. 综上所述, 判定系统的周期时间保持不变的运算次数为

$$n+n-s_1+i_1+4+n-s_2+i_1+4+\cdots+n-s_k+i_1+4+k$$

整理得  $(k+1)n+5k+ki_1-s_1-s_2-\cdots-s_k$ . 由第 3 步中  $i_1 < s_t, 1 \le t \le k$  可知

$$(k+1)n+5k+ki_1-s_1-s_2-\cdots-s_k \leq (k+1)n+5k+ki_1-ki_1$$
.

由添加捷径的条数  $k \leq n-2$  可得

$$(k+1)n + 5k + ki_1 - ki_1 \le n^2 + 4n - 10.$$

由此可知, 判定周期时间保持不变的算法为多项式算法. 上面的不等式同时表明, 算法的时间复杂性为  $O(n^2)$ . 证毕.

下面通过一个数值例子来说明添加捷径对系统周期性的影响.

**例 1** 考虑 n=5 和 n=25 的环形拓扑的网络化极大 – 加系统, 分别在添加 1 条从结点 1 到结点 3 且权重为 0 的捷径后, 系统时序的变化.

由推论 2 和 3 可知, 当 n=5 和 n=25 时, 添加 1 条捷径后系统周期长度为 1 的概率的最大下界均为 4/5.

当 n=5 时,系统的周期长度是 5,而添加捷径后系统的周期长度为 1(=(5,4)); 当 n=25 时,系统的周期长度是 25,而添加捷径后系统的周期长度为 1(=(25,24)). 在未添加捷径的情况下,n=5 的系

统矩阵

$$A_0 = egin{pmatrix} arepsilon & arepsil$$

在添加捷径 1→3 的情况下, 系统矩阵变为

$$\overline{A}_0 = egin{pmatrix} arepsilon & arep$$

由系统的状态方程  $x(k+1) = A_0 \otimes x(k)$  可知, 在添加捷径  $1 \to 3$  后, 状态  $x_3$  满足的方程从

$$x_3(k+1) = x_2(k)$$

变为

$$\overline{x}_3(k+1) = \overline{x}_1(k) \oplus \overline{x}_2(k).$$

两个系统在同一初始条件  $x(0) = \overline{x}(0) = (1,0,0,0,0)^{\tau}$  下的状态方程由

$$x(1) = A_0 \otimes x(0) = (0, 1, 0, 0, 0)^{\tau}, \quad x(2) = A_0 \otimes x(1) = (0, 0, 1, 0, 0)^{\tau},$$

$$x(3) = A_0 \otimes x(2) = (0, 0, 0, 1, 0)^{\tau}, \quad x(4) = A_0 \otimes x(3) = (0, 0, 0, 0, 1)^{\tau},$$

$$x(5) = A_0 \otimes x(4) = (1, 0, 0, 0, 0)^{\tau}$$

变为

$$\overline{x}(1) = \overline{A}_0 \otimes \overline{x}(0) = (0, 1, 1, 0, 0)^{\tau}, \quad \overline{x}(2) = \overline{A}_0 \otimes \overline{x}(1) = (0, 0, 1, 1, 0)^{\tau}, \dots, 
\overline{x}(12) = \overline{A}_0 \otimes \overline{x}(11) = (1, 0, 1, 1, 1)^{\tau}, \quad \overline{x}(13) = \overline{A}_0 \otimes \overline{x}(12) = (1, 1, 1, 1, 1)^{\tau}, 
\overline{x}(13) = \overline{x}(14) = \dots = (1, 1, 1, 1, 1)^{\tau}.$$

当 n=25 时, 对于初始条件  $x(0) = \overline{x}(0) = (1,0,0,\ldots,0)^{\tau}$ , 在未添加捷径的情况下,

$$x(1) = (0, 1, 0, 0, \dots, 0)^{\tau}, x(2) = (0, 0, 1, \dots, 0)^{\tau}, \dots, x(25) = x(0) = (1, 0, 0, \dots, 0)^{\tau}.$$

在添加捷径  $1 \rightarrow 3$  的情况下,

$$\overline{x}(1) = (0, 1, 1, 0, \dots, 0)^{\tau}, \dots, \overline{x}(75) = (1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0)^{\tau}, \dots,$$

$$\overline{x}(425) = \overline{x}(426) = \dots = (1, 1, 1, 1, \dots, 1)^{\tau}.$$

由于篇幅所限,这里略去了详细的计算过程.

通过以上的分析可以看出,在 n=5 的情况下,原系统的状态分量  $x_1(k)$  每经过 5 步重复一次,而添加了捷径的系统经过有限的转换过程后  $\overline{x}_1(k)$  会直接出现重复.同样地,在 n=25 的情况下,原系统的状态分量  $x_1(k)$  每经过 25 步重复一次,而添加了捷径的系统经过有限的转换过程后  $\overline{x}_1(k)$  会直接出现重复.

#### 6 进一步的讨论

以上考虑了随机添加起始点相同的捷径的情形.下面讨论随机添加起始点不相同的捷径的情形. 先分两种情形考虑随机添加两条捷径对系统周期性能的影响.

**情形 1** 系统  $S_0$  随机添加的两条捷径分别为  $i \to v$ ,  $s \to t$ , 其中 i < s < v, 对应的权重分别为  $c_1$ ,  $c_2$ , 如图 3 所示. 在这种情况下, 产生的新回路只有两个, 其长度分别记为  $r_1$  和  $r_2$ . 系统的周期长度为  $(r_1, r_2, n)$ . 因为  $(r_1, n) = 1$  或  $(r_2, n) = 1$  必有  $(r_1, r_2, n) = 1$ , 所以系统周期长度为 1 的概率

$$P_2 \geqslant \frac{\varphi(n)}{n} + \frac{\varphi(n)}{n} - \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{\varphi(n)}{n}\right)^2.$$

此结论与系统  $S_0$  添加随机起始点相同的捷径时周期长度为 1 的概率的下界表达式一致. 由此可以得到下面的推论.

**推论 4** 如果系统  $S_0$  随机添加两条捷径, 且捷径  $1 \rightarrow i$  以外的另一条捷径  $i_0 \rightarrow k$  满足  $1 \leqslant i_0 < i$ , 则系统周期长度为 1 的概率

$$P_2 \geqslant 2 \frac{\varphi(n)}{n} - \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^2.$$

推论 4 是文献 [9] 的定理 3.6. 在这种情形中, 系统的周期时间为

$$\lambda' = \max\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{n}, \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+1 - (v-i)}, \frac{\sum_{j=1}^{s-1} a_j + c_2 + \sum_{j=t}^{n} a_j}{n+1 - (t-s)}\right),$$

且周期时间不变的充分必要条件为

$$c_1 \leqslant \frac{n\sum_{j=i}^{v-1} a_j - (v-1-i)\sum_{j=1}^n a_j}{n}, \quad c_2 \leqslant \frac{n\sum_{j=s}^{t-1} a_j - (t-1-s)\sum_{j=1}^n a_j}{n}.$$

虽然此结论的表达式与系统添加起始点相同的捷径时周期时间保持不变的表达式不同, 但二者的实质是相同的, 其证明也与系统添加起始点相同的捷径时的证明类似, 这里就不再叙述了.

**情形 2** 系统  $S_0$  随机添加的两条捷径分别为  $i \to v$ ,  $s \to t$ , 其中  $i < v \le s < t$ , 对应的权重分别为  $c_1$ ,  $c_2$ , 如图 4 所示. 由图 4 可以看出, 系统产生了 3 个新回路, 其长度分别记为  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ . 系统的周期长度为  $(r_1, r_2, r_3, n)$ . 由  $(r_1, n) = 1$ , 或  $(r_2, n) = 1$ , 或  $(r_3, n) = 1$  可知  $(r_1, r_2, r_3, n) = 1$ . 于是系统周期长度为 1 的概率

$$P_2 \geqslant 1 - \left(1 - \frac{\varphi(n)}{n}\right)^3.$$

在这种情形中, 系统的周期时间为

$$\lambda' = \max\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{n}, \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+1 - (v-i)}, \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{s-1} a_j + c_2 + \sum_{j=t}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (t-s)}, \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{s-1} a_j + c_2 + \sum_{j=t}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (t-s)}, \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{s-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{s-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{s-1} a_j + c_2 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (t-s)}, \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{n} a_j + c_2 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (t-s)}, \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{n} a_j + c_2 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (t-s)}, \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{n} a_j + c_2 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (t-s)}, \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{n} a_j + c_2 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (t-s)}, \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{n} a_j + c_2 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (t-s)}, \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (t-s)}, \frac{\sum_{j=v}^{n} a_j + c_2 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (t-s)}, \frac{\sum_{j=v}^{n} a_j + c_2 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (t-s)}, \frac{\sum_{j=v}^{n} a_j + c_2 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (t-s)}, \frac{\sum_{j=v}^{n} a_j + c_2 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (v-i)}, \frac{\sum_{j=v}^{n} a_j + c_2 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (v-i)}, \frac{\sum_{j=v}^{n} a_j + c_2 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (v-i)}, \frac{\sum_{j=v}^{n} a_j + c_2 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (v-i)}, \frac{\sum_{j=v}^{n} a_j + c_2 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (v-i)}, \frac{\sum_{j=v}^{n} a_j + c_2 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (v-i)}, \frac{\sum_{j=v}^{n} a_j + c_2 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (v-i)}, \frac{\sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i) - (v-i)}, \frac{\sum_{j=v}^{n} a_j + c_2 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2 - (v-i)}, \frac{\sum_{j=v}^{n} a_j}{n+2$$

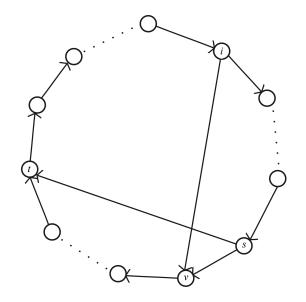


图 3 添加捷径  $i \rightarrow v$  和  $s \rightarrow t, i < s < v$ 

**Figure 3** Adding the shortcuts  $i \rightarrow v$  and  $s \rightarrow t, i < s < v$ 

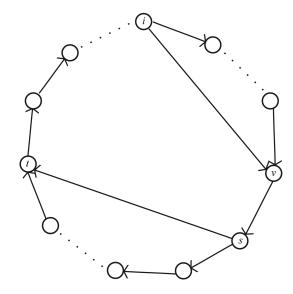


图 4 添加捷径  $i \rightarrow v$  和  $s \rightarrow t$ ,  $i < v \leqslant s < t$ 

 $\mbox{\bf Figure 4} \quad \mbox{Adding the shortcuts $i \to v$ and $s \to t$, $i < v \leqslant s < t$ }$ 

$$\frac{\sum_{j=1}^{s-1} a_j + c_2 + \sum_{j=t}^{n} a_j}{n+1 - (t-s)}.$$

要使系统的周期时间保持不变,必需

$$\frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^n a_j}{n+1 - (v-i)} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n},\tag{5}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{s-1} a_j + c_2 + \sum_{j=t}^n a_j}{n + 2 - (v - i) - (t - s)} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n},\tag{6}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{s-1} a_j + c_2 + \sum_{j=t}^n a_j}{n+1 - (t-s)} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n}$$
 (7)

同时成立. 由(5)式可得

$$c_1 \leqslant \frac{n \sum_{j=i}^{v-1} a_j - (v-1-i) \sum_{j=1}^n a_j}{n},$$

由 (6) 式可得

$$c_2 \leqslant \frac{n \sum_{j=s}^{t-1} a_j - (t-1-s) \sum_{j=1}^n a_j}{n},$$

由 (7) 式可得

$$\sum_{i=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{i=v}^{s-1} a_j + c_2 + \sum_{i=t}^n a_i \le \frac{(n+2-(v-i)-(t-s))\sum_{j=1}^n a_j}{n}.$$

于是

$$c_{1} + c_{2} \leq \frac{(n+2-(v-i)-(t-s))\sum_{j=1}^{n} a_{j}}{n} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{j} - \sum_{j=v}^{s-1} a_{j} - \sum_{j=t}^{n} a_{j}}{n}$$

$$= \frac{(n+2-(v-i)-(t-s))\sum_{j=1}^{n} a_{j} - n\sum_{j=1}^{i-1} a_{j} - n\sum_{j=v}^{s-1} a_{j} - n\sum_{j=t}^{n} a_{j}}{n}$$

$$= \frac{n\sum_{j=s}^{t-1} a_{j} + n\sum_{j=i}^{v-1} a_{j} - (v-1-i+t-1-s)\sum_{j=1}^{n} a_{j}}{n}.$$

综上所述可得周期时间不变的充要条件为

$$c_1 \leqslant \frac{n \sum_{j=i}^{v-1} a_j - (v-1-i) \sum_{j=1}^n a_j}{n}, \quad c_2 \leqslant \frac{n \sum_{j=s}^{t-1} a_j - (t-1-s) \sum_{j=1}^n a_j}{n}.$$

由上面的叙述可以得到下面的定理.

**定理 4** 设系统  $S_0$  随机添加的两条起始点不相同的捷径分别为  $i \to v, s \to t$ , 其中  $i < v \le s < t$ , 对应的权重分别为  $c_1, c_2$ , 则系统周期长度为 1 的概率

$$P_2 \geqslant 1 - \left(1 - \frac{\varphi(n)}{n}\right)^3.$$

在情形 2 中, 系统产生了 3 个新回路, 而系统周期长度为 1 的概率的下界表达式与情形 1 的不同. 由图 3 和 4 可以看出, 系统  $S_0$  添加两条捷径仅有这两种情形. 同时还可以看出系统  $S_0$  添加起始点不相同捷径的复杂性.

**引理 2** 设系统  $S_0$  随机添加的 3 条捷径分别为  $i \to v$ ,  $s \to t$ ,  $h \to q$ , 其中  $i < s < v \leqslant t \leqslant h < q$ , 对应的权重分别为  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ , 如图 5 所示, 则系统周期长度为 1 的概率

$$P_3 \geqslant 1 - \left(1 - \frac{\varphi(n)}{n}\right)^5.$$

证明 由图 5 可以看出,系统产生了 5 个新回路,其长度分别记为  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5$ . 从而系统的周期长度为  $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n)$ . 由  $(r_1, n) = 1$ , 或  $(r_2, n) = 1$ , 或  $(r_3, n) = 1$ , 或  $(r_4, n) = 1$ , 或  $(r_5, n) = 1$  可知,  $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, n) = 1$ . 因此系统周期长度为 1 的概率

$$P_3 \geqslant C_5^1 \frac{\varphi(n)}{n} - C_5^2 \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^2 + C_5^3 \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^3 - \dots + C_5^5 \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^5$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{\varphi(n)}{n}\right)^5.$$

证毕.

由图 5 可以得到系统的周期时间为

$$\lambda' = \max\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{n}, \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+1-(v-i)}, \frac{\sum_{j=1}^{s-1} a_j + c_2 + \sum_{j=t}^{n} a_j}{n+1-(t-s)}, \frac{\sum_{j=1}^{h-1} a_j + c_3 + \sum_{j=q}^{n} a_j}{n+1-(q-h)}, \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{h-1} a_j + c_3 + \sum_{j=q}^{n} a_j}{n+2-(v-i)-(q-h)}, \frac{\sum_{j=1}^{s-1} a_j + c_2 + \sum_{j=t}^{h-1} a_j + c_3 + \sum_{j=q}^{n} a_j}{n+2-(q-h)-(t-s)}\right).$$

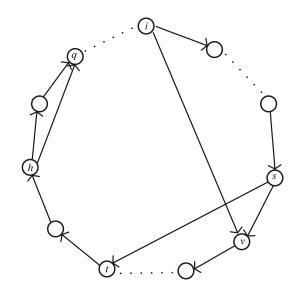


图 5 添加捷径  $i \rightarrow v, \ s \rightarrow t, \ h \rightarrow q, \ i < s < v \leqslant t \leqslant h < q$ 

Figure 5 Adding the shortcuts  $i \to v, \; s \to t, \; h \to q, i < s < v \leqslant t \leqslant h < q$ 

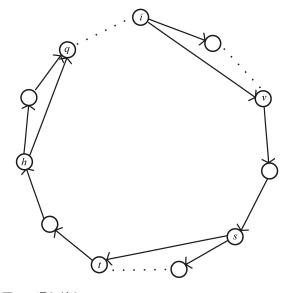


图 6 添加捷径  $i 
ightarrow v, \; s 
ightarrow t, \; h 
ightarrow q, \; i < v \leqslant s < t \leqslant h < q$ 

**Figure 6** Adding the shortcuts  $i \to v$ ,  $s \to t$ ,  $h \to q, i < v \le s < t \le h < q$ 

要使系统的周期时间保持不变, 必需

$$\begin{split} & \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^n a_j}{n+1-(v-i)} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n}, \\ & \frac{\sum_{j=1}^{s-1} a_j + c_2 + \sum_{j=t}^n a_j}{n+1-(t-s)} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n}, \\ & \frac{\sum_{j=1}^{h-1} a_j + c_3 + \sum_{j=q}^n a_j}{n+1-(q-h)} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n}, \\ & \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{h-1} a_j + c_3 + \sum_{j=q}^n a_j}{n+2-(v-i)-(q-h)} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n}, \\ & \frac{\sum_{j=1}^{s-1} a_j + c_2 + \sum_{j=t}^{h-1} a_j + c_3 + \sum_{j=q}^n a_j}{n+2-(q-h)-(t-s)} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n} \end{split}$$

同时成立. 解不等式可得

$$c_{1} \leqslant \frac{n \sum_{j=i}^{v-1} a_{j} - (v-1-i) \sum_{j=1}^{n} a_{j}}{n}, \quad c_{2} \leqslant \frac{n \sum_{j=s}^{t-1} a_{j} - (t-1-s) \sum_{j=1}^{n} a_{j}}{n},$$

$$c_{3} \leqslant \frac{n \sum_{j=i}^{q-1} a_{j} - (q-1-h) \sum_{j=1}^{n} a_{j}}{n}.$$

**引理 3** 设系统  $S_0$  随机添加的 3 条捷径分别为  $i \to v, \ s \to t, \ h \to q$ , 其中  $i < v \le s < t \le h < q$ , 对应的权重分别为  $c_1, c_2, c_3$ , 如图 6 所示, 则周期时间不变的充分必要条件为

$$c_1 \leqslant \frac{n \sum_{j=1}^{v-1} a_j - (v-1-i) \sum_{j=1}^n a_j}{n}, \quad c_2 \leqslant \frac{n \sum_{j=s}^{t-1} a_j - (t-1-s) \sum_{j=1}^n a_j}{n},$$

及

$$c_3 \leqslant \frac{n \sum_{j=i}^{q-1} a_j - (q-1-h) \sum_{j=1}^n a_j}{n}.$$

证明 必要性. 由图 6 可知, 系统产生的新回路的个数为 7, 因而周期时间为

$$\lambda' = \max\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{n}, \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{n} a_j}{n+1 - (v-i)}, \frac{\sum_{j=1}^{s-1} a_j + c_2 + \sum_{j=t}^{n} a_j}{n+1 - (t-s)}, \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{s-1} a_j + c_2 + \sum_{j=t}^{h-1} a_j + c_3 + \sum_{j=q}^{n} a_j}{n+3 - (v-i) - (t-s) - (q-h)}\right).$$

要使系统的周期时间保持不变,必需

$$\frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^n a_j}{n+1 - (v-i)} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n}, \quad \frac{\sum_{j=1}^{s-1} a_j + c_2 + \sum_{j=t}^n a_j}{n+1 - (t-s)} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n},$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{h-1} a_j + c_3 + \sum_{j=q}^n a_j}{n+1 - (q-h)} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n}, \quad \cdots,$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j + c_1 + \sum_{j=v}^{s-1} a_j + c_2 + \sum_{j=t}^{h-1} a_j + c_3 + \sum_{j=q}^n a_j}{n+2 - (v-i) - (t-s)} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^n a_j}{n}$$

同时成立. 解上面的不等式即可得到必要性条件.

充分性. 由周期时间的定义, 直接计算即知系统的周期时间保持不变. 证毕.

**引理 4** 设系统  $S_0$  随机添加 k 条互不相交的捷径  $i_1 \rightarrow v_1$ ,  $i_2 \rightarrow v_2$ ,...,  $i_k \rightarrow v_k$ , 其中  $i_1 < v_1 \le i_2 < v_2 \le \cdots \le i_k < v_k$ , 对应的权重分别为  $c_1, c_2, \ldots, c_k$ , 如图 7 所示, 则系统产生新回路的个数为  $2^k - 1$ .

**证明** 对 k 进行归纳. 当 k=2 时, 由上面的情形 2 可知, 系统产生新回路的个数为 3, 即  $2^2-1$ . 当 k=3 时, 由引理 3 可知, 系统产生新回路的个数为 7, 即  $2^3-1$ .

假定添加 k-1 条捷径时结论成立, 下证添加 k 条捷径时结论也成立. 因为添加 k-1 条捷径时, 系统产生新回路的个数为  $2^{k-1}-1$ . 当再多加 1 条捷径后, 系统又产生的新回路的个数为  $2^{k-1}$ , 所以添加 k 条捷径后系统产生新回路的个数为  $2^{k-1}-1+2^{k-1}=2\cdot 2^{k-1}-1=2^k-1$ . 证毕.

**定理 5** 设系统  $S_0$  随机添加 k 条互不相交的捷径  $i_1 \to v_1, i_2 \to v_2, \dots, i_k \to v_k$ , 其中  $i_1 < v_1 \le i_2 < v_2 \le \dots \le i_k < v_k$ , 则系统周期长度为 1 的概率

$$P_k \geqslant 1 - \left(1 - \frac{\varphi(n)}{n}\right)^{2^k - 1}.$$

**证明** 对 k 进行归纳. 当 k=2 时, 由情形 2 可知, 系统产生新回路的个数为 3, 回路的长度分别记为  $r_1, r_2, r_3$ . 于是系统周期长度为 1 的概率

$$\begin{split} P_2 \geqslant C_3^1 \frac{\varphi(n)}{n} - C_3^2 \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^2 + C_3^3 \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^3 \\ = 1 - \left(1 - \frac{\varphi(n)}{n}\right)^{2^2 - 1}. \end{split}$$

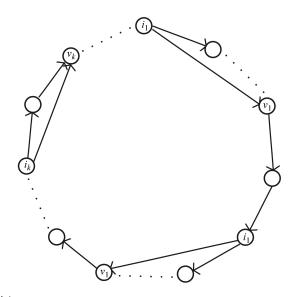


图 7 添加捷径  $i_1 o v_1, i_2 o v_2, \ldots, i_k o v_k, \ i_1 < v_1 \leqslant i_2 < v_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k < v_k$ 

Figure 7 Adding the shortcuts  $i_1 \rightarrow v_1, i_2 \rightarrow v_2, \dots, i_k \rightarrow v_k, i_1 < v_1 \leqslant i_2 < v_2 \leqslant \dots \leqslant i_k < v_k$ 

当 k=3 时, 由图 6 可以看出, 系统产生了 7 个新回路, 其长度分别记为  $r_1, r_2, \ldots, r_7$ . 系统的周期长度为  $(r_1, r_2, \ldots, r_7, n)$ . 由  $(r_1, n) = 1$ , 或  $(r_2, n) = 1, \ldots$ , 或  $(r_7, n) = 1$  必有  $(r_1, r_2, \ldots, r_7, n) = 1$ . 由此可知系统周期长度为 1 的概率

$$P_3 \geqslant C_7^1 \frac{\varphi(n)}{n} - C_7^2 \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^2 + C_7^3 \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^3 - \dots + C_7^7 \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^7$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{\varphi(n)}{n}\right)^{2^3 - 1}.$$

归纳假定添加的捷径少于 k条时定理成立. 现在考虑添加 k条捷径的情形. 由引理 4 可知系统新产生的回路个数为  $2^k-1$ , 其长度分别记为  $r_1, r_2, \ldots, r_{2^{k-1}-1}, \ldots, r_{2^k-2}, r_{2^{k}-1}$ . 由  $(r_1, r_2, \ldots, r_{2^{k-1}-1}, n) = 1$ , 或  $(r_{2^{k-1}}, n) = 1$ , 或  $(r_{2^{k-1}+1}, n) = 1$ , …, 或  $(r_{2^{k}-1}, n) = 1$ , 必有  $(r_1, r_2, \ldots, r_{2^{k}-1}, n) = 1$ . 由  $(r_{2^{k-1}}, n) = 1$ , 或  $(r_{2^{k-1}+1}, n) = 1$ , …, 或  $(r_{2^{k}-1}, n) = 1$  可知周期长度为 1 的概率为

$$P = C_{2^{k-1}}^{1} \frac{\varphi(n)}{n} - C_{2^{k-1}}^{2} \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{2} + C_{2^{k-1}}^{3} \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{3} - \dots - C_{2^{k-1}}^{2^{k-1}} \left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)^{2^{k-1}}$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{\varphi(n)}{n}\right)^{2^{k-1}}.$$

从而可得添加 k 条捷径时系统周期长度为 1 的概率

$$\begin{split} P_k &\geqslant P_{k-1} + P - P_{k-1}P \\ &= (1 - P)P_{k-1} + P \\ &\geqslant \left(1 - \left(1 - \left(1 - \frac{\varphi(n)}{n}\right)^{2^{k-1}}\right)\right) \left(1 - \left(1 - \frac{\varphi(n)}{n}\right)^{2^{k-1}-1}\right) + 1 - \left(1 - \frac{\varphi(n)}{n}\right)^{2^{k-1}} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{\varphi(n)}{n}\right)^{2^k - 1}. \end{split}$$

证毕.

对于随机添加 k 条有相交捷径的情形, 由引理 2 及其证明可以看出, 系统产生新回路的情况较为 复杂; 由定理 5 可知相应的周期长度为 1 的概率和周期时间的计算也较为复杂. 对此, 我们将作进一步的研究.

致谢 第一作者感谢王彩璐的帮助.

#### 参考文献 -

- 1 Wang X F, Chen G R. Synchronizaion in small-world dynamical networks. Int J Bifurcation Chaos, 2002, 12: 187–192
- 2 Liu Z X, Guo L. Connectivity and synchronization of the Vicsek's model. Sci China Ser F-Inf Sci, 2008, 51: 848–858
- 3 Hui Q, Haddad W M. Distributed nonlinear control algorithms for network consensus. Automatica, 2008, 44: 2375–2381
- 4 Shi H, Wang L, Chu T G. Flocking of mult-agent systems with a dynamic virtual leader. Int J Control, 2009, 82: 43–58
- 5 Hokayem P, Chatterjee D, Ramponi F A, et al. Stable networked control systems with bounded control authority. IEEE Trans Autom Control, 2012, 57: 3153–3157
- 6 Lee P, Clark A, Bushnell L, et al. A passivity framework for modeling and mitigating wormhole attacks on networked control systems. IEEE Trans Autom Control, 2014, 59: 3224–3227
- 7 Razeghi-Jahromi M, Seyedi A. Stabilization of networked control systems with sparse observer-controller networks. IEEE Trans Autom Control, 2015, 60: 1686–1691
- 8 Wang W, Nešić D, Postoyan R. Emulation-based stabilization of networked control systems implemented on FlexRay. Automatica, 2015, 59: 73–83
- 9 Zhao Q C. Analysis of impacts of adding shortcuts to DEDS of ring topology. J Syst Sci Math Sci, 2011, 31: 1092–1096 [赵千川. 添加捷径对环状 DEDS 的影响分析. 系统科学与数学, 2011, 31: 1092–1096]
- 10 Addad B, Amari S, Lesage J J. Networked conflicting timed event graphs representation in (Max, +) algebra. Discrete Event Dynamic Syst Theory Appl, 2012, 22: 429–449
- 11 Cuninghame-Green R A. Minimax algebra. In: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin: Springer, 1979
- 12 Cohen G, Dubois D, Quadrat J-P, et al. A linear-system-theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. IEEE Trans Autom Control, 1985, 30: 210–220
- 13 Baccelli F, Cohen G, Olsder G J, et al. Synchronization and Linearity. New York: Wiley, 1992
- 14 Heidergott B, Olsder G J, van der Woude J. Max Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems. Princeton: Princeton University Press, 2006
- 15 Wang L, Zheng D Z. On the reachability of linear discrete event dynamic systems. Appl Math J Chinese Univ, 1990, 5: 292–301 [王龙, 郑大钟. 线性离散事件动态系统的可达性. 高等学校应用数学学报, 1990, 5: 292–301]
- 16 Zhang M, Wu Z. Controllability and observability problems in linear discrete event system model of FMS. In: Workshop on Discrete Event System Theory and Applications in Manufacturing and Social Phenomena. Beijing: International Academic Publishers, 1991. 267–270
- 17 Chen W D, Qi X D. Period assignment of discrete event dynamic systems. Sci Sin Math, 1993, 23: 1–7 [陈文德, 齐向东. 离散事件动态系统的周期配置. 中国科学 A 辑, 1993, 23: 1–7]
- 18 Chen W, Qi X, Deng S. The eigen-problem and period analysis of the discrete event system. Syst Sci Math Sci, 1990, 3: 243–260
- 19 Gaubert S. Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioides (in French). Dissertation for Ph.D. Degree. Paris: L'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1992
- 20 Gunawardena J. From max-plus algebra to nonexpansive mappings: a nonlinear theory for discrete event systems. Theor Comput Sci, 2003, 293: 141–167
- 21 Gaubert S, Gunawardena J. The duality theorem for min-max functions. Comptes Rendus Académie des Sci Paris, 1998, 326: 43–48

- 22 Zhao Q. A remark on inseparability of min-max systems. IEEE Trans Autom Control, 2004, 14: 967-970
- 23 Necoara I, de Schutter B, van den Boom T J J, et al. Robust control of constrained max-plus-linear systems. Int J Robust Nonlinear Control, 2009, 19: 218–242
- 24 van den Boom T J J, de Schutter B. Modeling and control of switching max-plus-linear systems with random and deterministic switching. Disc Event Dynamic Syst Theory Appl, 2012, 22: 293–332
- 25 Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory. Berlin: Springer, 1976

## Shortcuts and periodicity of networked max-plus system with ring topology

Mengran GUO<sup>1,2</sup>, Yuegang TAO<sup>2\*</sup>, Bingling CAI<sup>1</sup> & Zilong ZHANG<sup>1,3</sup>

- 1 College of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, China;
- 2 School of Control Science and Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China;
- 3 Key Lab of Computational Mathematics and Applications of Hebei Province, Shijiazhuang 050024, China \*E-mail: yuegangtao@hebut.edu.cn

Abstract This paper investigates the characteristics of cyclicity and cycle time after adding shortcuts to the networked max-plus system with ring topology. Both the lower bound expression of the probability of cyclicity being one and the sufficient and necessary condition for the cycle time being unchanged are established after adding k shortcuts with the same starting point. For two systems with the dimensions of a prime number and its power, it is discovered that the lower bounds of the probability of cyclicity being one is consistent after adding the shortcuts. The paper also investigates some situations of adding shortcuts under conditions with different starting points. The lower bound expression of the probability of cyclicity being one is given after adding k shortcuts with mutual disjoint. The method for algebra and combinatorics is constructive. The algorithm of the cycle time remaining unchanged is given after adding k shortcuts with the same starting point. It is proven that such algorithm has a polynomial bound. At the same time, the numerical example for cyclicity is also given.

Keywords max-plus system, ring topology, networked system, shortcut, cycle time, cyclicity



Mengran GUO received her M.S. degree from Hebei Normal University, China, in 2014. She is currently a visiting lecturer at the School of Control Science and Engineering, Hebei University of Technology. Her research interest includes the modeling and control of discrete-event systems.



Yuegang TAO received his Ph.D. degree from the Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences. Currently, he is a professor at the School of Control Science and Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin. His current research interests include the analysis, control, and optimization of discrete-event systems.



Bingling CAI received her M.S. degree from Hebei Normal University, Shijiazhuang, in 2001. She is currently a lecturer at the College of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University. Her research interest includes ring and algebra.



Zilong ZHANG received his M.S. degree from Hebei Normal University, China. He is a professor of the College of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University. His research interest includes ring and group ring.