中国科学: 信息科学　2016 年　第 46 卷　第 3 期: 338–349
SCIENTIA SINICA Informationis
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论 文

布尔控制网络的部分变量能控性

宋金利, 肖会敏, 李志强*

河南财经政法大学数学与信息科学学院, 郑州 450046
* 通信作者. E-mail: lizhiqiang@amss.ac.cn

收稿日期: 2015–07–09; 接受日期: 2015–08–25; 网络出版日期: 2016–01–27
国家自然科学基金项目 (批准号: 61203050, 61374079)、河南省高等学校青年骨干教师资助计划项目 (批准号: 2013GGJS-099)、河南省基础与前沿技术研究计划项目 (批准号: 132300410011) 和河南省高等学校哲学社会科学研究 “三重” 重大项目 (专项) (批准号: 2014-SZZD-30) 资助

摘要　部分变量能控性是一个特殊的能控性概念, 它只考虑系统状态变量中一部分变量的能控性. 本文主要以布尔网络为代表, 研究逻辑控制系统的部分变量能控性问题. 利用矩阵的半张量积, 逻辑控制系统被表示为离散时间仿射线性系统. 从系统部分变量的结构矩阵出发, 首先给出逻辑系统部分变量能控性的概念, 然后通过构造部分变量能控性矩阵, 得到布尔网络的部分变量能控的充要条件为部分变量能控性矩阵的各个元素都大于 0, 最后通过例子说明如何构造控制序列使部分变量状态能达.

关键词　布尔控制网络　能控性　部分变量能控　部分状态能达　半张量积

1　引言

Kauffman 在文献 [1,2] 提出用布尔网络模型研究基因调控网络, 并指出布尔网络的不动点或极限环通常对应基因调控网络中细胞分化过程的不同阶段或细胞的某种显型 (Phenotype) 等 [2]. 以系统生物学中基因调控网络的调节为背景, 对布尔网络的研究主要包含两个方面: (1) 对极限环的寻找算法和极限环性质的研究, 如文献 [3,4] 等研究了布尔网络的极限环以及网络状态在不同极限环之间的迁移; (2) 对布尔网络 (随机布尔网络) 的干预控制问题的研究 [5,6].

布尔控制网络是最简单的一类逻辑动态系统. 程代展等在文献 [7] 中提出的矩阵半张量积是研究逻辑动态系统的重要工具之一. 利用矩阵的半张量积 [7], 布尔控制网络被表示为离散时间动态系统, 并得到了一系列重要的成果 [8], 国内外学者称这种方法为布尔网络的状态空间方法. 在状态空间框架下, 对布尔控制网络的能控能观性、稳定性进行了大量研究: 文献 [9,10] 首次在状态空间框架下给出了布尔控制网络的能控和能观的概念, 并给出了检验网络能控能观的充要条件, 同时文献 [10] 获得了国际自动控制联合会旗舰杂志 Automatica 2008∼2010 最佳论文奖 (理论/方法类). 文献 [11] 研究了布尔控制网络避开状态集合的能控性概念, 并给出避开状态集合的能控性条件. 文献 [12,13] 分别从不同角度得到了随机布尔网络的稳定与可镇定的充要条件. 文献 [14∼16] 分别研究了带有脉冲、时滞的布尔

引用格式: 宋金利, 肖会敏, 李志强. 布尔控制网络的部分变量能控性. 中国科学: 信息科学, 2016, 46: 338–349, doi: 10.1360/N112015-00023

　

系统的稳定与可镇定的充要条件. 在文献 [17] 中针对切换布尔网络提出了切换能达概念, 并利用这一技巧得到切换布尔网络稳定性的检验条件. 文献 [18,19] 分别研究了布尔控制网络能观性和输出反馈镇定问题. 文献 [20] 利用状态反馈控制器研究了布尔控制网络的镇定问题. 文献 [21] 研究了一般的有限值逻辑系统的最优控制问题, 并指出在演化博弈中最优策略往往存在于几乎周期策略集. 文献 [22] 研究了带有切换和脉冲的高阶布尔控制网络的能控和可镇定的充要条件. 文献 [23] 研究了状态和控制带有约束的混合值概率逻辑控制网络的能控性, 并给出了系统能控的充分必要条件.

在逻辑系统中, 各个结点演化规律由不同的逻辑函数来描述, 由于结构复杂, 使得对整个系统状态的处理非常困难. 另一方面, 有时人们只对一部分变量感兴趣, 或者由于技术原因对一些变量无法测定, 这就要去研究系统中部分变量的演化规律. 比如在神经网络中, 神经元是模拟人的大脑功能, 当大脑一些神经细胞在兴奋, 而另一些神经细胞却抑制兴奋, 这也是典型的部分变量问题 [24]. 对于系统中部分变量性质的研究可以追溯到 A.M. Lyapunov [25,26], 目前主要是对微分方程系统、时滞系统、差分系统以及含有脉冲的系统部分变量稳定性的讨论 [25,27,28], 关于一般连续系统的部分变量稳定性结果可以参看专著 [28]. 另一方面, 文献 [29] 研究了逻辑系统的部分变量的稳定与一致稳定, 并得到采用常值控制律和状态反馈控制律能使布尔网络部分变量镇定、一致镇定的充要条件.

逻辑系统的部分变量的能控性研究还没有相关结果. 本文主要研究了布尔控制网络的部分状态变量能控性, 设系统的状态为 $x(t)=(x^1(t),x^2(t))^{\mathrm{T}}$, 其中 $x(t)\in\{0,1\}^n, x^1(t)\in\{0,1\}^p, x^2(t)\in\{0,1\}^{n-p}$. 部分状态变量的能控性只考虑系统中部分逻辑变量 x^1 的能控性. 所得结果可以直接推广到更一般的多值或混合值逻辑控制系统. 本文结构安排如下: 第 2 部分是一些准备知识, 主要介绍了矩阵的半张量积和逻辑变量取值的向量化、布尔控制网络的代数形式表示; 第 3 部分介绍了布尔控制网络系统的部分变量能控性概念, 构造部分变量能控性判别矩阵, 并从能控性矩阵得到布尔控制网络的部分状态变量能控的充要条件; 第 4 部分通过例子说明如何构造控制序列使部分变量的状态能达; 第 5 部分是一些结论.

2 准备工作

为叙述方便, 本文用到的基本符号列表如下:

- $\mathcal{D}=\{0,1\}$, 其中 $T\sim 1$ 表示逻辑变量取值 “真”, $F\sim 0$ 表示逻辑变量取值 “假”;
- $\mathbf{1}_k := (\underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{k})^{\mathrm{T}}$;
- δ_n^i: 单位矩阵 I_n 的第 i 列;
- $\Delta_n := \{\delta_n^i \mid i=1,\ldots,n\}$, $\Delta := \Delta_2$;
- $\mathcal{R}^{n\times r}$: 表示所有 $n\times r$ 矩阵的集合;
- $\mathrm{Col}_i(L)$ 表示矩阵 L 的第 i 列;
- $\mathrm{Col}(L)$: 表示矩阵 L 的所有列向量组成的集合;
- 矩阵 $L\in\mathcal{R}^{n\times r}$ 称为逻辑矩阵, 其中 $\mathrm{Col}(L)\subset\Delta_n$. 全体 $n\times r$ 逻辑矩阵的集合为 $\mathcal{L}_{n\times r}$, 逻辑矩阵 $L=[\delta_n^{i_1},\delta_n^{i_2},\ldots,\delta_n^{i_r}]$ 记为 $L=\delta_n[i_1,i_2,\ldots,i_r]$;
- 矩阵 $B=(b_{ij})\in\mathcal{R}^{n\times r}$ 称为布尔矩阵, 其中 $b_{ij}\in\mathcal{D}$. 全体 $n\times r$ 布尔矩阵的集合为 $\mathcal{B}_{n\times r}$;
- $\mathrm{Blk}_i(L)$: 矩阵 $L\in\mathcal{L}_{2^n\times 2^{n+m}}$ 被等分为 2^m 个子块时, $\mathrm{Blk}_i(L)$ 表示其中第 i 个子块;
- 矩阵 $M=(m_{ij})>0$: 对于任意的 i,j, $m_{ij}>0$.

2.1 矩阵半张量积

首先将逻辑变量的取值与向量建立对应, 不引起混淆的情况下, $1 \sim \delta_2^1$, $0 \sim \delta_2^2$, $\mathcal{D} \sim \Delta$. 矩阵半张量积 [7] 是本文的主要工具. 下文所指的 "半张量积" 是指左半张量积. 关于矩阵半张量积的性质可以参看文献 [7,8].

定义 1 [8] 设 $A \in \mathcal{R}^{m\times n}$, $B \in \mathcal{R}^{p\times q}$, 记 $t = \mathrm{lcm}(n,p)$ 为 n 和 p 的最小公倍数. 矩阵 A 和 B 的半张量积定义为

$$A \ltimes B = (A \otimes I_{t/n})(B \otimes I_{t/p}). \tag{1}$$

利用矩阵的半张量积, 将逻辑动态系统转化为代数形式的过程中, 下述引理起了关键作用.

引理 1 [8] 设 $x_1,\dots,x_n$ 是 n 个布尔逻辑变量, 对任意的 n 元布尔函数 $f(x_1,\dots,x_n):\mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$, 存在唯一的矩阵 $M_f \in \mathcal{L}_{2\times 2^n}$, 使得

$$f(x_1,\dots,x_n) = M_f \ltimes_{i=1}^n x_i, \quad x_i \in \Delta, \tag{2}$$

称 (2) 是布尔函数 f 的代数形式.

利用逻辑变量的向量形式和逻辑算子的矩阵形式, 上述引理指出一个 n 元布尔函数 f 可以用它的结构矩阵 $M_f \in \mathcal{L}_{2\times 2^n}$ 表示. 在此基础上, 逻辑函数对逻辑变量的作用就变为结构矩阵与逻辑变量的作用. 可以参看文献 [7,8] 了解更多细节.

2.2 布尔控制网络的代数表示

布尔控制网络的动态方程为

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t)), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t),\dots,x_n(t),u_1(t),\dots,u_m(t)), \end{cases} \tag{3}$$

其中 $f_i, i=1,\dots,n$ 是 $(n+m)$ 元布尔函数, $x_i(t) \in \mathcal{D}, i=1,\dots,n$ 是状态变量, $u_j(t) \in \mathcal{D}, j=1,\dots,m$ 是输入变量. 设 $X(t) := \ltimes_{i=1}^n x_i(t)$, $U(t) := \ltimes_{i=1}^m u_i(t)$. 由引理 1, 得到

$$x_i(t+1) = N_i U(t) X(t), \quad x_i \in \Delta,\ i=1,\dots,n, X \in \Delta_{2^n}, U \in \Delta_{2^m}, \tag{4}$$

其中 $N_i, i=1,\dots,n$ 是布尔函数 f_i 的结构矩阵, 并且 $N_i \in \mathcal{L}_{2\times 2^{n+m}}$. 进一步, 利用文献 [8] 的方法得到布尔控制网络 (3) 的代数形式

$$X(t+1) = LU(t)X(t), \quad X \in \Delta_{2^n},\ U \in \Delta_{2^m}, \tag{5}$$

其中 $\mathrm{Col}_j L = \ltimes_{i=1}^n \mathrm{Col}_j(N_i)$, $j=1,\dots,2^{n+m}$, 并且矩阵 $L \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^{n+m}}$ 称为式 (3) 的结构矩阵. 本文为了讨论部分变量的能控性, 特别地得到与式 (3) 和 (5) 等价的部分变量代数形式为

$$\begin{cases} X^1(t+1) = L_1 U(t) X^1(t) X^2(t), \\ X^2(t+1) = L_2 U(t) X^1(t) X^2(t), \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\mathrm{Col}_j(L_1) = \ltimes_{i=1}^p \mathrm{Col}_j(N_i)$, $j=1,\dots,2^{n+m}$, $\mathrm{Col}_j(L_2) = \ltimes_{i=p+1}^n \mathrm{Col}_j(N_i), j=1,\dots,2^{n+m}$, 称 $L_1 \in \mathcal{L}_{2^p\times 2^{m+n}}$ 和 $L_2 \in \mathcal{L}_{2^{n-p}\times 2^{m+n}}$ 为式 (3) 的部分变量结构矩阵.

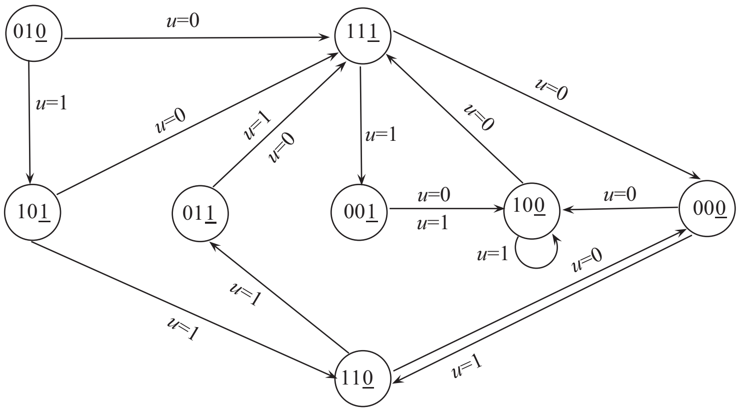

图 1　布尔网络 (7) 的状态图

Figure 1　The dynamic graph of (7)

3　主要结果

首先给出布尔控制网络部分变量的能控性概念.

定义 2　设系统 (3) 的状态为 $x(t)=(x_1(t),\dots,x_n(t))^{\mathrm{T}}$. 记初始状态为 $x(0)=(x_1(0),\dots,x_n(0))^{\mathrm{T}}$ 和目标状态 $x_d=(x_1^*,\dots,x_n^*)^{\mathrm{T}}$. (1) 如果存在时刻 T 和控制序列 $\{u(t)\}$, 使网络的部分变量 $x^1(t)=(x_1(t),\dots,x_p(t))^{\mathrm{T}}$ 的状态在第 T 步时为 $(x_1^*,\dots,x_p^*)^{\mathrm{T}}$, 即 $x^1(T)=(x_1^*,\dots,x_p^*)^{\mathrm{T}}$, 则称布尔网络 (3) 是从初始状态 $x(0)$ 到部分变量状态 $(x_1^*,\dots,x_p^*)^{\mathrm{T}}$ 能控的, 也称布尔控制网络 (3) 的部分变量状态 $(x_1^*,\dots,x_p^*)^{\mathrm{T}}$ 从全变量初始状态 $x(0)$ 能达. (2) 如果对任意的 $x^1=(x_1,\dots,x_p)^{\mathrm{T}}$, 布尔网络 (3) 都是从初始状态 $x(0)=(x_1(0),\dots,x_n(0))^{\mathrm{T}}$ 能达的, 则称布尔网络 (3) 是从 $x(0)$ 出发部分变量 x^1 能控的. (3) 如果布尔控制网络 (3) 从任意的 $x(0)$ 出发都是部分变量 x^1 能控的, 则称布尔网络是部分变量 $x^1=(x_1,\dots,x_p)^{\mathrm{T}}$ 能控的.

例 1　考虑如下布尔网络,

$$\begin{cases} x_1(t+1)=x_1(t)\rightarrow(\neg x_2(t)),\\ x_2(t+1)=\neg(u(t)\rightarrow x(t))\leftrightarrow(x_1(t)\leftrightarrow x_2(t)),\\ x_3(t+1)=(x_1(t)\rightarrow u(t))\leftrightarrow x_2(t). \end{cases} \tag{7}$$

从布尔控制网络 (7) 的状态演化图 1 不难看出, 无论选取什么样的控制序列 $u(t)$, $t=0,1,\dots$, 都不能使网络的状态从 $(x_1(0),x_2(0),x_3(0))^{\mathrm{T}}\neq(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 演化到 $(0,1,0)^{\mathrm{T}}$, 即系统是不能控的.

如果只考虑状态变量 $(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}$, 不考虑变量 x_3 的状态. 从任意的状态 $(x_1(0),x_2(0),x_3(0))^{\mathrm{T}}$ 出发, 都能找到适当的控制序列使网络的部分变量 $(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}$ 的状态到达 $(0,0)^{\mathrm{T}}$, $(0,1)^{\mathrm{T}}$, $(1,0)^{\mathrm{T}}$, $(1,1)^{\mathrm{T}}$. 比如, 从初始状态 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 出发, 为了使部分变量 $(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}$ 的状态演化到 $(0,1)^{\mathrm{T}}$, 我们只需选择控制序列为 $u(0)=0,u(1)=1,u(2)=1$ 即可 (控制序列的选择方式可能不唯一). 为此, 布尔控制网络 (7) 是部分变量 $(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}$ 能控的.

注 1　由于部分变量的能控性只关注全变量中一部分变量的演化特性, 当布尔控制网络本身是能控时, 一定是任意部分变量能控的. 从例 1 可以看出, 不能控的布尔控制网络有可能是部分变量能控的. 当系统本身比较复杂, 或者全变量不能控时, 讨论部分变量的能控性具有更重要的实际意义.

为了在状态空间框架下研究布尔控制网络, 并得到部分变量能控的充要条件, 我们从逻辑变量的向量值形式重述定义 2.

定义 3 对于布尔控制网络 (3) (代数形式为 (5)), 考虑初始状态 $X(0)=\ltimes_{i=1}^{n}x_i(0)$ 和目标状态 $X_d=X_d^1\ltimes X_d^2$, 其中 $X_d^1\in\Delta_{2^p}, X_d^2\in\Delta_{2^{n-p}}$.

(i) 如果存在时刻 T 和一个控制序列 $U(t), t=0,1,\ldots,T-1$, 使布尔控制网络 (3) (代数形式为 (5)) 从初始状态 $X(0)$ 出发, 在控制序列 $U(t)$ 作用下, 部分变量 X^1 能演化到 X_d^1, 则称布尔控制网络 (3) (代数形式为 (5)) 是从初始状态 $X(0)$ 到部分变量 X_d^1 能控, 也称布尔网络 (5) 的部分变量 X^1 的状态 X_d^1 从状态 $X(0)$ 能达.

(ii) 如果对任意的 X_d^1, 布尔控制网络 (3) (代数形式为 (5)) 都是从初始状态 $X(0)$ 能达的, 则称布尔网络 (5) 在 $X(0)$ 是部分变量 X^1 能控的.

(iii) 如果布尔控制网络 (3) (代数形式为 (5)) 在任意的 $X(0)$ 都是部分状态变量 X^1 能控的, 则称布尔网络 (3) 是部分状态 X^1 能控的.

将矩阵 L 和 L_1 等分为 2^m 个子矩阵块

$$\begin{aligned} L\ &=[\mathrm{Blk}_1(L),\mathrm{Blk}_2(L),\ldots,\mathrm{Blk}_{2^m}(L)],\\ L_1&=[\mathrm{Blk}_1(L_1),\mathrm{Blk}_2(L_1),\ldots,\mathrm{Blk}_{2^m}(L_1)],\end{aligned}\tag{8}$$

其中 $\mathrm{Blk}_i(L)\in\mathcal{L}_{2^n\times 2^n}$, $\mathrm{Blk}_i(L_1)\in\mathcal{L}_{2^p\times 2^n}$ 分别表示 (8) 中矩阵 L 和 L_1 的第 i 个子块.

从初始状态 $X(0)$, 如果我们选择控制输入 $U(0)=\delta_{2^m}^i$,

$$\begin{aligned} X(1)\ &=LU(0)X(0)=\mathrm{Blk}_i(L)X(0),\\ X^1(1)&=L_1U(0)X(0)=\mathrm{Blk}_i(L_1)X(0).\end{aligned}$$

从 $X(0)$ 出发, 在所有可能控制 $U(0)$ 作用下, 系统的全状态 X 第一步可能到达的状态集合记为

$$\mathcal{R}(1,X(0))=\{\mathrm{Blk}_1(L)X(0),\mathrm{Blk}_2(L)X(0),\ldots,\mathrm{Blk}_{2^m}(L)X(0)\}.$$

相应地, 部分状态 X^1 第一步可能到达的状态集合记为

$$\mathcal{R}_1(1,X(0))=\{\mathrm{Blk}_1(L_1)X(0),\mathrm{Blk}_2(L_1)X(0),\ldots,\mathrm{Blk}_{2^m}(L_1)X(0)\}.$$

为行文方便, 我们不加混淆的使用网络状态的集合 $\mathcal{R}(1,X(0))(\mathcal{R}_1(1,X(0)))$ 与向量 $X(1)(X^1(1))$ 两种形式, 以后不再说明. 记向量

$$\begin{aligned} X(1)&=\mathrm{Blk}_1(L)X(0)+\mathrm{Blk}_2(L)X(0)+\cdots+\mathrm{Blk}_{2^m}(L)X(0)\\ &=(L\ltimes\mathbf{1}_{2^m})X(0)=MX(0),\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned} X^1(1)&=\mathrm{Blk}_1(L_1)X(0)+\mathrm{Blk}_2(L_1)X(0)+\cdots+\mathrm{Blk}_{2^m}(L_1)X(0)\\ &=(L_1\ltimes\mathbf{1}_{2^m})X(0)=M_1X(0),\end{aligned}\tag{10}$$

其中 $M=L\ltimes\mathbf{1}_{2^m}\in\mathcal{R}_{2^n\times 2^n}$, $M_1=L_1\ltimes\mathbf{1}_{2^m}\in\mathcal{R}_{2^p\times 2^n}$.

进一步, 选择控制输入 $U(1)=\delta_{2^m}^i$, 则

$$\begin{aligned} X(2)\ &=LU(1)X(1)=\mathrm{Blk}_i(L)X(1),\\ X^1(2)&=L_1U(1)X(1)=\mathrm{Blk}_i(L_1)X(1).\end{aligned}\tag{11}$$

部分状态 X^1 第二步可能到达的状态集合记为

$$\mathcal{R}_1(2, X(0)) = \{\mathrm{Blk}_1(L_1)X(1), \mathrm{Blk}_2(L_1)X(1), \ldots, \mathrm{Blk}_{2^m}(L_1)X(1)\}.$$

类似地, 可以得到全状态序列 $X(t)$ 和部分状态序列 $X^1(t), t = 1, 2, \ldots$, 其中

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathrm{Blk}_1(L)X(t-1) + \mathrm{Blk}_2(L)X(t-1) + \cdots + \mathrm{Blk}_{2^m}(L)X(t-1) \\ &= (L \ltimes \mathbf{1}_{2^m})X(t-1) = M^t X(0), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} X^1(t) &= \mathrm{Blk}_1(L_1)X(t-1) + \mathrm{Blk}_2(L_1)X(t-1) + \cdots + \mathrm{Blk}_{2^m}(L_1)X(t-1) \\ &= (L_1 \ltimes \mathbf{1}_{2^m})X(t-1) = M_1 M^{t-1} X(0). \end{aligned} \tag{13}$$

注 2 设 $X(t) = (a_1, \ldots, a_{2^n})^{\mathbf{T}}$, 从文献 [11] 中定理 1 可知, 分量 a_i 表示从状态 $X(0) = \delta_{2^n}^j$ 出发, 经过 t 步能使系统状态到 $\delta_{2^n}^i$ 的可选控制序列的个数. 如果 $a_i = 0$, 则表示不存在控制序列使系统的状态从 $X(0) = \delta_{2^n}^j$ 出发在第 t 步演化到状态 $\delta_{2^n}^i$.

对于 $M_1 M^{k-1}$, 当 $k = 1$ 时, 考虑 M_1, 从 (10) 可知, $(M_1)_{ij} = c \neq 0$ 表示存在控制输入使系统状态从 $\delta_{2^n}^j$ 出发, 经过一步可以使部分变量 X^1 的状态演化为 $\delta_{2^p}^i$; 若 $(M_1)_{ij} = 0$ 则表示不存在这样的控制.

定理 1 对于布尔控制网络 (3), 矩阵 M 和 M_1 可从 (9) 和 (10) 计算得到. 如果 $(M_1 M^{s-1})_{i,j} = c, (c \neq 0)$, 则存在 c 个不同的控制序列, 使系统从全状态 $\delta_{2^n}^j$ 开始, 在第 s 步将部分变量 X^1 的状态演化到 $\delta_{2^p}^i$.

证明 我们用数学归纳法. 当 $s = 1$ 时, 考虑矩阵 M_1. 设 $(M_1)_{ij} = c \neq 0$, 则存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_c$, 使得 $(\mathrm{Blk}_{\alpha_1}(L))_{ij} = \cdots = (\mathrm{Blk}_{\alpha_c}(L))_{ij} = 1$. 为此分别取 $U = \delta_{2^m}^{\alpha_i} (i = 1, \ldots, c)$, 都能使系统状态从状态 $\delta_{2^n}^j$ 演化到状态 $\delta_{2^n}^i$. 即使系统状态从状态 $\delta_{2^n}^j$ 演化到状态 $\delta_{2^n}^i$ 的控制有 c 个不同的选取方式.

一般地, 设 $(M_1 M^{s-1})_{ij}$ 是系统在第 s 步将全变量状态 $\delta_{2^n}^j$ 演化到部分变量 X^1 的状态 $\delta_{2^p}^i$ 的控制序列个数.

经过 $s+1$ 步, 系统从全变量状态 $\delta_{2^n}^j$ 开始, 最终使部分状态 X^1 演化到 $\delta_{2^p}^i$, 可以分解为两个过程: (i) 首先系统全状态从 $\delta_{2^n}^j$ 开始经 1 步演化到状态 $\delta_{2^n}^k$; (ii) 从全变量状态 $\delta_{2^n}^k$ 经过 s 步, 部分变量 X^1 的状态演化到 $\delta_{2^p}^i$. 因此经过 $s+1$ 步, 系统从全变量状态 $\delta_{2^n}^j$ 开始, 最终使部分变量 X^1 演化到 $\delta_{2^p}^i$, 总的可能个数为

$$N'_{s+1}(j \to i) = \sum_{k=1}^{2^n} N'_s(k \to i) \times N_1(j \to k), \tag{14}$$

其中 $N_1(j \to k)$ 表示系统全变量状态从 $\delta_{2^n}^j$ 出发经过一步演化到 $\delta_{2^n}^k$ 时可选的控制输入 U(0) 的个数, $N'_s(k \to i)$ 表示系统全变量状态从 $\delta_{2^n}^k$ 出发经过 s 步的演化, 使部分变量 X^1 的状态演化为 $\delta_{2^p}^k$ 时可选的控制序列的个数.

由假设, 易知

$$N'_s(k \to i) = (M_1 M^{s-1})_{ik}. \tag{15}$$

接下来考虑 $N_1(j \to k)$. 如果 $(\mathrm{Blk}_\alpha(L))_{kj} = 1$, 选择控制 $\delta_{2^m}^\alpha$, 使得 $\delta_{2^n}^k = L_1 \delta_{2^m}^\alpha \delta_{2^n}^j$. 因此, $N_1(j \to k)$ 满足 $(\mathrm{Blk}_\alpha(L))_{kj} = 1$ 的 α 的个数, 即

$$N_1(j \to k) = \left(\sum_{\alpha=1}^{2^m} \mathrm{Blk}_\alpha(L) \right)_{kj} = M_{kj}. \tag{16}$$

将式 (15) 和 (16) 代入式 (14), 得到

$$N'_{s+1}(j \to i) = \sum_{k=1}^{2^n} (M_1 M^{s-1})_{ik} \times M_{kj}, \tag{17}$$

式 (17) 的右端可以理解为矩阵 M_1M^{s-1} 的第 i 行与矩阵 M 的第 j 列的向量积. 因此 $(M_1M^s)_{i,j}$ 表示系统从状态 $\delta_{2^n}^j$ 出发, 在第 $s+1$ 步使部分变量 X^1 的状态演化到 $\delta_{2^p}^i$ 的可选的控制序列的个数. 结论得证.

在文献 [11] 中, 取集合 $\Omega = \Phi$, 可得如下命题.

命题 1 [11] 考虑布尔控制网络 (3) (代数形式为 (5)). 对于状态 $\alpha, \beta \in \Delta_{2^n}$, 如果从 $\alpha = \delta_{2^n}^j$ 出发在第 s 步能到达状态 $\beta = \delta_{2^n}^i$, 那么存在一个控制序列, 使系统状态从 α 出发至多经过 2^n 步到达状态 β.

推论 1 考虑布尔控制网络 (3) (代数形式为 (5)). 对于状态 $\alpha \in \Delta_{2^n}, \beta \in \Delta_{2^p}$, 如果从全变量状态 $\alpha = \delta_{2^n}^j$ 出发在第 s 步能到达部分变量 X^1 的状态 $\beta = \delta_{2^p}^i$, 那么至少存在一个控制序列, 使系统状态从 α 出发至多经过 2^n 步使部分变量 X^1 到达状态 β.

证明 设 $\alpha = \delta_{2^n}^j$ 出发在第 s 步能到达状态 $\beta = \delta_{2^p}^i$, 则一定存在 $\bar{\beta} \in \Delta_{2^{n-p}}$, 系统从 $\alpha = \delta_{2^n}^j$ 出发在第 s 步时系统的全变量状态为 $\beta' = \beta \ltimes \bar{\beta}$. 即存在一个控制序列 $U(0), \ldots, U(s-1)$, 使系统的状态从 $\alpha = \delta_{2^n}^j$ 出发在第 s 步时到达 $\beta' = \beta \ltimes \bar{\beta}$. 对应的全部变量 X 和部分变量 X^1 状态演化分别为

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1 &=& LU(0)\alpha, \\ \alpha_2 &=& LU(1)\alpha_1, \\ &\cdots& \\ \alpha_{s-1} &=& LU(s-2)\alpha_{s-2}, \\ \beta' &=& LU(s-1)\alpha_{s-1}. \end{array}\right. \quad \text{与} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \beta_1 &=& L_1U(0)\alpha, \\ \beta_2 &=& L_1U(1)\alpha_1, \\ &\cdots& \\ \beta_{s-1} &=& L_1U(s-2)\alpha_{s-2}, \\ \beta &=& L_1U(s-1)\alpha_{s-1}. \end{array}\right. \tag{18}$$

由命题 1 可知 $s \leqslant 2^n$. 因此, 从 $\alpha = \delta_{2^n}^j$ 出发至多经过 2^n 步使部分变量状态到达 $\beta = \delta_{2^p}^i$. 结论得证.

为了检验布尔网络的部分状态 X^1 的能控性, 定义系统 (3) 的部分变量 X^1 的能控性判别矩阵

$$M_C = \sum_{k=1}^{2^n} M_1 M^{k-1}. \tag{19}$$

作为前述分析的总结, 我们给出本文的主要结论.

定理 2 考虑布尔控制网络 (3) (代数形式为 (5)).

(i) 从初始状态 $X_0 = \delta_{2^n}^j$ 出发, 部分变量 X^1 的状态 $x_d = \delta_{2^p}^i$ 能达当且仅当 $(M_C)_{ij} > 0$;

(ii) 布尔网络 (3) (代数形式为 (5)) 从 $X_0 = \delta_{2^n}^j$ 出发, 部分变量 X^1 能控当且仅当 $\mathrm{Col}_j(M_C) > 0$;

(iii) 布尔网络 (3) (代数形式为 (5)) 的部分变量 X^1 能控, 当且仅当 $M_C > 0$.

事实上, 我们只关心状态之间是否能在适当控制序列作用下能达, 即部分状态能控性矩阵元素是否为 0. 构造矩阵 $\bar{M}_C = (\bar{m}_{ij})$, 其中

$$\bar{m}_{ij} = \begin{cases} 0, \ m_{ij} = 0, \\ 1, \ m_{ij} > 0. \end{cases}$$

对于布尔向量和布尔矩阵的运算定义如下.

定义 4[9,30]

(i) 设 $a,b\in D$, 定义布尔和 $+_{\mathcal{B}}$ 与布尔积 $\times_{\mathcal{B}}$ 为

$$a+_{\mathcal{B}} b=a\vee b,\quad a\times_{\mathcal{B}} b=a\wedge b.$$

(ii) 设 $A\in\mathcal{B}_{m\times n}$, $B\in\mathcal{B}_{n\times p}$, 定义布尔矩阵 A 和 B 的布尔积, $C:=A\times_{\mathcal{B}}B\in\mathcal{B}_{m\times p}$, 其中

$$c_{ij}=a_{i1}\times_{\mathcal{B}} b_{1j}+_{\mathcal{B}}\cdots+_{\mathcal{B}} a_{in}\times_{\mathcal{B}} b_{nj}.$$

特别地, 设 $A\in\mathcal{B}_{n\times n}$, 则 $A^{(2)}:=A\times_{\mathcal{B}}A$.

利用布尔矩阵的布尔和与布尔积, 构造 $\bar{M}_C$ 为

$$\bar{M}_C=\sum_{k=1\ \mathcal{B}}^{2^n}(\bar{M}_1\bar{M}^{(k-1)}).\tag{20}$$

定理 2 可以重述为下述命题.

命题 2 考虑布尔控制网络 (3) (代数形式为 (5)).

(i) 从初始状态 $X_0=\delta_{2^n}^j$ 出发, 部分变量 X^1 的状态 $X_d=\delta_{2^n}^i$ 能达当且仅当 $(\bar{M}_C)_{ij}=1$;

(ii) 布尔控制网络 (3) (代数形式为 (5)) 从 $X_0=\delta_{2^n}^j$ 出发, 部分变量 X^1 能控当且仅当 $\mathrm{Col}_j(\bar{M}_C)=1$;

(iii) 布尔控制网络 (3) (代数形式为 (5)) 的部分变量 X^1 能控, 当且仅当 $\bar{M}_C=1$.

4 控制序列设计

上一部分给出了部分变量能控的判别矩阵, 如果布尔网络 (3) 的部分变量能控, 这一部分我们介绍如何寻找从全部变量初始状态到部分变量目标状态的控制序列.

算法 1 控制序列设计反推算法

Step 0. 设部分变量状态 $X_d=\delta_{2^p}^i$ 可以从初始状态 $X_0=\delta_{2^n}^j$ 能达. 由推论 1, 存在 $s(1\leqslant s\leqslant 2^n)$, 使得 $(M_1M^{s-1})_{ij}>0$.

Step 1. 设计 $U(s-1)$.

确定正整数 k_{s-1}, 使得 $(M_1)_{i,k_{s-1}}>0$, $(M^{s-1})_{k_{s-1},i}>0$.

由 M_1 的构造方法, 在 L_1 的 2^m 个等分子块 (8) 中至少有一个子块 $\mathrm{Blk}_{\gamma_{s-1}}(L_1)$, 使得 $(\mathrm{Blk}_{\gamma_{s-1}}(L_1))_{ik_{s-1}}>0$.

取 $U(s-1)=\delta_{2^m}^{\gamma_{s-1}}$. 此时有 $\delta_{2^p}^i=L_1\delta_{2^m}^{\gamma_{s-1}}X(s-1)$, 记 $X(s-1)=\delta_{2^n}^{k_{s-1}}$.

Step 2. 设计 $U(s-2),U(s-3),\ldots,U(0)$.

利用文献 [11] 中的算法 2 设计序列 $U(t),t=0,1,\ldots,s-2$, 使系统状态从 $X_0=\delta_{2^n}^j$ 经过 $s-1$ 步到 $X(s-1)=\delta_{2^n}^{k_{s-1}}$.

通过一个例子说明如何用算法 1 寻找控制序列.

例 2 考虑例 1 中的布尔控制网络 (7). 设 $X(t)=\ltimes_{i=1}^3x_i(t)$, $X^1(t)=\ltimes_{i=1}^2x_i(t)$. 利用矩阵的半张量积, 将式 (8) 中各式分别代入得到布尔网络 (7) 的代数形式和部分变量代数形式为

$$\begin{aligned}X(t+1)&=LU(t)X(t),\\X^1(t+1)&=L_1U(t)X(t),\end{aligned}\tag{21}$$

其中

$$L = \delta_8[7\ 5\ 2\ 4\ 1\ 3\ 4\ 2\ 8\ 8\ 1\ 1\ 1\ 1\ 4\ 4],$$
$$L_1 = \delta_4[4\ 3\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1\ 4\ 4\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2]. \tag{22}$$

从 L 和 L_1 分别得到矩阵 $M = L \ltimes \mathbf{1}_2$ 和 $M_1 = L_1 \ltimes \mathbf{1}_2$ 为

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

容易检验, 布尔控制网络 (7) 的全变量 X 的能控性矩阵为

$$\sum_{k=1}^{8} M^k = \begin{pmatrix} 118 & 116 & 119 & 120 & 126 & 122 & 114 & 113 \\ 39 & 43 & 39 & 38 & 36 & 41 & 40 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 191 & 197 & 188 & 198 & 192 & 192 & 204 & 194 \\ 18 & 21 & 23 & 20 & 22 & 22 & 18 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 63 & 56 & 59 & 57 & 56 & 55 & 58 & 60 \\ 81 & 77 & 82 & 77 & 78 & 77 & 76 & 81 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

易知, 式 (7) 不是全变量状态能控的, 这一点也可以从图 1 看出.

计算部分变量 X^1 的能控性矩阵为

$$M_C = \sum_{k=1}^{8} M_1 M^{k-1} = \begin{pmatrix} 157 & 159 & 158 & 158 & 162 & 163 & 154 & 154 \\ 191 & 197 & 188 & 198 & 192 & 193 & 204 & 194 \\ 18 & 21 & 23 & 20 & 22 & 22 & 18 & 21 \\ 144 & 133 & 141 & 134 & 134 & 132 & 134 & 141 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

由定理 2 可知, 布尔控制网络 (7) 的部分变量 $X^1 \sim (x_1, x_2)$ 是能控的, 与例 1 中状态演化是一致的.

下面设计控制序列使系统的状态从 $X_0 = \delta_8^6$ 出发, 部分变量 X_1 到达目标状态 $X_d = \delta_4^3$.

- Step 1. 通过计算可以确定最小的 $s = 3$, 满足 $(M_1 M^2)_{3,6} > 0$. 可以取 $k_2 = 2$, 满足 $(M_1)_{3,2} > 0$ 和 $(M^2)_{2,6} > 0$. 由于 $[\mathrm{Blk}_1(L_1)]_{3,2} > 0$. 因此取 $U(2) = \delta_2^1$, $X(2) = \delta_8^2$, 此时 $X^1(2) = \delta_4^1$.

• Step 2. 设计 $U(1), U(0)$, 使全变量状态从 $X(0) = \delta_8^6$ 演化到 δ_8^2. 可以取 $k_1 = 3$, 满足 $M_{2,3} > 0$ 和 $M_{3,6} > 0$. 由于 $[\mathrm{Blk}_1(L)]_{2,3} > 0$. 因此取 $U(1) = \delta_2^1$, 得到 $X(1) = \delta_8^3$, $X^1(1) = \delta_4^2$.

同时注意到 $M_{3,6} > 0$, 并且 $[\mathrm{Blk}_1(L)]_{3,6} > 0$, 取 $U(0) = \delta_2^1$. 为此得到一组控制序列为

$$U(0) = \delta_2^1 \sim 1, U(1) = \delta_2^1 \sim 1, U(2) = \delta_2^1 \sim 1.$$

在上述控制序列作用下, 布尔网络 (7) 的部分变量 X^1 的状态最终演化为 δ_4^3.

一般情况下, 满足条件的控制序列不是唯一的, 用这种算法找到所有满足条件的控制序列.

5　结论

利用矩阵的半张量积, 本文在状态空间框架下研究了布尔控制网络的部分变量能控性. 对于一个布尔控制网络, 其各个变量的能控性可能不一样, 虽然对于系统的某些变量可能是不能控的, 但对于系统的另外一些变量而言可能是能控的. 本文讨论的部分状态的能控性只考虑网络逻辑变量中所关心的一部分变量, 这就是布尔控制网络部分变量的能控性问题, 具有很强的理论意义和实际应用价值.

布尔控制网络是一类最简单的逻辑系统, 给出的部分变量能控性定义和部分变量能控的充要条件可以直接推广到一般的逻辑动态系统.

参考文献

1 Kauffman S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets. J Theor Biol, 1969, 22: 437–467

2 Kauffman S A. The Origins of Order: Self-organization and Selection in Evolution. New York: Oxford University Press, 1993

3 Raeymaekers L. Dynamics of Boolean networks controlled by biologically meaningful functions. J Theor Biol, 2002, 218: 331–341

4 Jack H, John M, Christopher L F, et al. Finding cycles in synchronous Boolean networks with applications to biochemical systems. Int J Bifurcat Chaos, 2003, 13: 535–552

5 Onami S, Kyoda K M, Morohashi M, et al. The DBRF method for inferring a gene network from large-scale steady-state gene expression date. In: Kitano H, ed. Foundations of Systems Biology. Cambrige: MIT Press, 2001. 59–75

6 Shmulevich I, Dougherty R, Zhang W. From Boolean to probabilistic boolean networks as models of gene regulatory networks. Proc IEEE, 2002, 90: 1778–1791

7 Cheng D Z, Qi H S. Semi-tensor Product of Matrix–Theory and Applications. Beijing: Science Press, 2007 [程代展, 齐洪胜. 矩阵的半张量积理论与应用. 北京: 科学技术出版社, 2007]

8 Cheng D Z, Qi H S, Li Z Q. Analysis and Control of Boolean Networks—A Semi-tensor Product Approach. London: Springer, 2011

9 Zhao Y, Cheng D Z, Qi H S. Input-state incidence matrix of Boolean control networks and its applications. Syst Control Lett, 2010, 59: 767–774

10 Cheng D Z, Qi H S. Controllability and observability of Boolean control networks. Automatica, 2009, 45: 1659–1667

11 Li Z Q, Song J L. Controllability of Boolean control networks avoiding states set. Sci China Inf Sci, 2014, 57: 032205

12 Li F F, Sun J T. Stability and stabilization issue of probabilistic Boolean network. In: Proceeding of the 30th Chinese Control Conference (CCC), Yantai, 2011. 6380–6385

13 Cheng D Z, Zhao Y. On controllability and stabilizability of probabilistic Boolean control networks. Sci China Inf Sci, 2014, 57: 012202

14 Li F F, Sun J T. Stability and stabilization of Boolean networks with impulsive effects. Syst Control Lett, 2012, 61: 1–5

15 Li F F, Sun J T. Controllability and optimal control of a temporal Boolean network. Neural Netw, 2012, 34: 10–17

16 Li F F, Sun J T. Controllability of higher order Boolean control networks. Appl Math Comput, 2012, 219: 158–169
17 Li H T. Global stability and controllability of switched Boolean networks. In: Proceeding of the 31st Chinese Control Conference (CCC), Hefei, 2012. 82–88
18 Li H T, Wang Y Z. Output feedback stabilization control design for Boolean control networks. Automatica, 2013, 49: 3641–3645
19 Li H T, Wang Y Z, Liu Z B. Observability of free Boolean networks by means of the semi-tensor product method. J Syst Sci Complex, 2014, 27: 666–678
20 Li R, Yang M, Chu T G. State feedback stabilization for Boolean control networks. IEEE Trans Autom Control, 2013, 58: 1853–1857
21 Cheng D Z, Zhao Y, Liu J B. Optimal control of finite-valued networks. Asian J Control, 2014, 16: 1179–1190
22 Chen H, Sun J T. On hybrid control of higher order Boolean networks. Neurocomputing, 2014, 142: 458–463
23 Liu Z B, Wang Y Z, Li H T. Controllability of context-sensitive probabilistic mix-valued logical control networks with constraints. Asian J Control, 2015, 17: 246–254
24 Jian J G. Analysis of stability and study on control for dynamic systems with respect to partial state variables. Dissertation for Ph.D. Degree. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2005 [蹇继贵. 动力系统部分变量的稳定性分析与控制研究. 博士学位论文. 武汉: 华中科技大学, 2005]
25 Silakov V P, Yudaev G S. On stability of difference systems relative to part of the variables. Differ Equ, 1975, 11: 687–691
26 Krasovskii N N. Stability of Motion. Stanford: Stanford University Press, 1963
27 Simeonov P S, Bainov D D. Stability with respect to part of variables in systems with impulse effects. J Math Anal Appl, 1987, 124: 547–560
28 Vorotnikov V I. Partial Stability and Control. Boston: Birkhäuser, 1998
29 Song J L, Li Z Q. Partial states stabilization of Boolean control networks. Sci Sin Inform, 46: 244–257 [宋金利, 李志强. 布尔控制网络部分状态变量的稳定与镇定. 中国科学: 信息科学, 46: 244–257]
30 Robert F. Discrete Iterations—A Metric Study. Berlin: Springer-Verlag, 1986

Partial variables controllability of Boolean control networks

Jinli SONG, Huimin XIAO & Zhiqiang LI*

School of Mathematics and Information Science, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou 450046*, China*
*E-mail: lizhiqiang@amss.ac.cn

Abstract Partial controllability of system is a special definition of controllability with respect to only a pre-specified subset of a system's state variables. The paper considers problems on the controllability of Boolean control networks with respect to a given part of variables that characterize the Boolean network. Using a semi-tensor product of matrices and the matrix expression of logic, the dynamics of a Boolean control network are converted to discrete time bilinear dynamics. First, the definition of partial controllability of Boolean control networks is introduced. Then, based on the algebraic form, necessary and sufficient conditions for partial state variable controllability with respect to a variables set are obtained. In addition, an illustrative example is provided to construct a proper control sequence with which to steer the partial variables' states to those desired.

Keywords Boolean control networks, controllability, partial controllability, partial reachability, semi-tensor product

Jinli SONG was born in 1981. She received her M.S. degree in Applied Mathematics from the Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou, in 2007. She is currently a lecturer with the School of Mathematics and Information Science, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou. Her research interests include nonlinear systems control and complex systems.

Zhiqiang LI was born in 1980. He received his Ph.D. degree in Systems Theory from the Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing, in 2010. He is currently an associate professor with the School of Mathematics and Information Science, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou. His research interests include logical dynamic systems and game theory.

Huimin XIAO was born in 1963. He received his Ph.D. degree in Automation from South China University of Technology in 1991. He is currently a professor with the School of Mathematics and Information Science, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou, China. His current research interests include nonlinear delay systems and complex systems.