SCIENTIA SINICA Informationis

论文

# 同步挤压 S 变换

黄忠来12,张建中12\*

海底科学与探测技术教育部重点实验室,青岛 266100
 中国海洋大学地球科学学院,青岛 266100
 \* 通信作者. E-mail: zhangjz@ouc.edu.cn

收稿日期: 2015-06-04; 接受日期: 2015-08-07 国家自然科学基金 (批准号: 41230318, 41074077)、高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20130132110023)、中央高校基本 科研业务费专项资金 (批准号: 201413004) 和山东省自然科学基金 (批准号: ZR2014DP001) 资助项目

**摘要** 小波变换是被广泛使用的信号时频分析的有效工具,但小波变换时频谱的分辨率达不到最优. 最近提出的同步挤压变换以严格的数学推导为基础,通过对小波变换结果进行"挤压"和重排,能够 获得更高分辨率的时频谱.由于小波变换难以较好地反映信号中的高频低振幅分量,使得基于小波 变换的同步挤压变换也很难反映信号中的高频低振幅分量.相比之下,S变换能够较好地刻画信号 中的高频低振幅分量,并能实现无损逆变换,但与小波变换一样,它的时频谱分辨率也达不到最优. 为了提高 S 变换的分辨率,本文提出了同步挤压 S 变换,给出了同步挤压 S 变换的基本理论,推导 出了同步挤压 S 变换及其逆变换的数学表达式.分别使用小波变换、S 变换、同步挤压变换和同步 挤压 S 变换对理论合成信号进行处理.结果表明,同步挤压 S 变换兼顾了 S 变换和同步挤压变换的 优势,不仅能够极大地提高信号时频变换的分辨率,而且能够较好地反映信号中弱振幅分量的时频 特征.

关键词 同步挤压 S 变换 同步挤压变换 S 变换 小波变换 时频分析

## 1 引言

时频分析是分析时变非平稳信号的强有力工具,成为现代信号处理研究的热点之一.小波变换 (wavelet transform, WT) 是被广泛使用的有效时频分析方法.由于在变换过程中引入了母小波,使得 在小波变换的时间 – 尺度谱或时间 – 频率谱上,某一时刻的能量总是分布在以某个瞬时频率为中心的 一定频率范围内,瞬时频率能量分布被模糊化了,使小波变换结果的时间分辨率和频率分辨率不能达 到最优.同步挤压变换 (synchrosqueezing transform, SST) 是 Daubechies 等<sup>[1]</sup>在小波变换的基础上提 出的一种新的时频变换方法.它通过严格的数学推导,把小波变换结果在一定频率范围内的时频能量 "挤压"到信号的瞬时频率附近,达到提高时频分辨率的目的,从本质上说是一种类似于经验模态分解 (EMD) 的算法.同步挤压变换已被成功应用于信号识别<sup>[2,3]</sup>、信号恢复和消噪<sup>[4,5]</sup>、机械故障诊断<sup>[6]</sup>、 地震信号处理<sup>[7~9]</sup>和古气候研究<sup>[10]</sup>等领域.

引用格式:黄忠来,张建中. 同步挤压 S 变换. 中国科学:信息科学, 2016, 46: 643-650, doi: 10.1360/N112015-00011



与小波变换相比, S 变换 (S-transform, ST) 的时频分辨率更高, 变换结果不是小波变换的时间 – 尺度谱, 而是更直观的时间 – 频率谱, 且具有无损的逆变换, 特别是对于信号中的高频弱振幅分量有 增强作用, 更加适合于对弱信号的检测和分析. 借鉴同步挤压变换的定义, 本文提出了同步挤压 S 变换 (synchrosqueezing S-transform, SSST), 推导出了该变换及其逆变换的数学表达式. 利用理论合成信 号, 比较了小波变换、S 变换、同步挤压变换和同步挤压 S 变换的效果, 说明了同步挤压 S 变换的优势.

## 2 同步挤压 S 变换及其逆变换

根据基于连续小波变换的同步挤压变换原理<sup>[1]</sup>,本文定义和推导了同步挤压 S 变换. 信号 *x*(*t*) 的 S 变换为<sup>[11]</sup>

$$ST_x(f,b) = \frac{|f|}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{\frac{-(t-b)^2 f^2}{2}} e^{-i2\pi f t} dt,$$
(1)

式中, *f* 为频率, *t* 为时间, *b* 为时间轴位移参数, i 为虚数单位, 下标 *x* 表示该项对应于信号 *x*(*t*). 将 式 (1) 改写成

$$ST_x(f,b) = \frac{|f|}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{\frac{-(t-b)^2 f^2}{2}} e^{-i2\pi f(t-b)} e^{-i2\pi f b} dt.$$
 (2)

令  $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} e^{i2\pi t}$ ,式 (2) 可表示为

$$ST_x(f,b) = |f| e^{-i2\pi f b} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{\psi[f(t-b)]} dt,$$
(3)

其中  $\overline{\psi(t)}$  为函数  $\psi(t)$  的复共轭. 根据 Parseval 定理以及 Fourier 变换性质中关于尺度变换和平移的 规则,式 (3) 可以写为

$$ST_x(f,b) = \frac{1}{2\pi} e^{-i2\pi fb} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\xi) \overline{\hat{\psi}(f^{-1}\xi)} e^{ib\xi} d\xi, \qquad (4)$$

式中,  $\hat{x}(\xi)$  是信号 x(t) 的 Fourier 变换,  $\hat{\psi}(\xi)$  表示  $\psi(t)$  的 Fourier 变换的复共轭. 先考虑信号为谐波的情况, 取  $x(t) = A \cos 2\pi f_0 t$ , 则

$$\hat{x}(\xi) = A\pi \left[ \delta \left( \xi - 2\pi f_0 \right) + \delta \left( \xi + 2\pi f_0 \right) \right].$$
(5)

把式 (5) 代入式 (4) 得

$$ST_x(f,b) = \frac{A}{2} e^{-i2\pi (f-f_0)b} \overline{\hat{\psi}(2\pi f^{-1}f_0)}.$$
(6)

由于  $\frac{\partial ST_x(f,b)}{\partial b} = iA\pi (f_0 - f) e^{-i2\pi (f - f_0)b} \overline{\hat{\psi}(2\pi f^{-1}f_0)}$ ,因此信号 x(t)的瞬时频率为

$$f_x(f,b) = f + [i2\pi ST_x(f,b)]^{-1} \frac{\partial ST_x(f,b)}{\partial b}.$$
(7)

显然, 对于形如  $x(t) = A \cos 2\pi f_0 t$  的单分量信号, 由上式可得

$$f_x(f,b) = f + [i2\pi ST_x(f,b)]^{-1} \frac{\partial ST_x(f,b)}{\partial b} = f + \frac{iA\pi (f_0 - f) e^{-i2\pi (f - f_0)b} \hat{\psi} (2\pi f^{-1} f_0)}{i2\pi \cdot \frac{A}{2} e^{-i2\pi (f - f_0)b} \overline{\hat{\psi} (2\pi f^{-1} f_0)}} = f_0.$$
(8)

644

对于更一般的多分量信号  $x(t) = \sum_{n=1}^{N} x_n(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n(t) \cos [\phi_n(t)]$ , 且满足  $A_n(t), \phi'_n(t) > 0, \forall t$ , 这里  $\phi'_n(t)$  表示  $\phi_n(t)$  的导数. 由于 S 变换是线性变换 <sup>[11]</sup>, 因此多分量信号 x(t) 的 S 变换结果 可以表示为 N 个分量  $x_n(t)$  的 S 变换之叠加, 即

$$ST_{x}(f,b) = \sum_{n=1}^{N} ST_{x_{n}}(f_{n},b),$$
(9)

且.

$$ST_{x_n}(f_n, b) = \frac{|f_n|}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x_n(t) e^{\frac{-(t-b)^2 f_n^2}{2}} e^{-i2\pi f_n t} dt.$$
 (10)

各个单分量 x<sub>n</sub>(t) 的瞬时频率都可以由式 (7) 表示为

$$f_{x_n}(f_n, b) = f_n + [i2\pi ST_{x_n}(f_n, b)]^{-1} \frac{\partial ST_{x_n}(f_n, b)}{\partial b},$$
(11)

那么,多分量信号 x(t) 的瞬时频率可表示为

$$f_x(f,b) = \sum_{n=1}^{N} \left\{ \delta \left( f - f_n \right) \left[ f_n + (i2\pi ST_{x_n}(f_n, b))^{-1} \frac{\partial ST_{x_n}(f_n, b)}{\partial b} \right] \right\},\tag{12}$$

其中, $\delta$ 为冲激函数. 类似于同步挤压变换<sup>[1]</sup>,为便于算法实现,将对频率区间的积分写成求和的形式, 定义信号 x(t)的同步挤压 S 变换为

$$SSST_{x}(f_{l},b) = L_{f}^{-1} \sum_{f_{k}:|f_{x}(f_{k},b)-f_{l}| \leq \Delta f/2} |ST_{x}(f_{k},b)| f_{k}\Delta f_{k},$$
(13)

其中,  $f_l$  是同步挤压变换后的频率,  $L_f$  是在 S 变换谱上以  $f_l$  为中心的频率区间半长度,  $f_k$  为 S 变换谱 上频率区间的离散化频率样点, 且  $\Delta f = f_k - f_{k-1}$ . 该式表示把 S 变换谱上的频率区间  $[f_l - L_f, f_l + L_f]$ 内的时频谱进行叠加放在频率  $f_l$  处, 即, 把一个频率区间的 S 变换时频谱 "挤压"到一个频率点上, 从而使同步挤压 S 变换极大地提高了 S 变换的频率分辨率. 原同步挤压变换是把一定频率范围内的 小波变换系数进行叠加<sup>[1]</sup>, 而我们在式 (13) 中取 S 变换结果的绝对幅值, 这样做的目的是避免在 "挤 压"过程中可能存在的正负数字相加而导致的能量损失, 改善挤压变换效果.

下面推导同步挤压 S 变换的逆变换表达式. 信号 x(t) 的 S 变换可以写为

$$ST_{x}(f,b) = \frac{|f|}{\sqrt{2\pi}} \int x(t) e^{\frac{-(t-b)^{2}f^{2}}{2}} e^{-i2\pi ft} dt = |ST_{x}(f,b)| e^{i\varphi(f,b)}.$$
 (14)

令  $C_{\varphi} = e^{-i[2\pi fb + \varphi(f,b)]} f^2$ , 利用式 (14), 则式 (13) 可写成

$$SSST_{x}(f_{l},b) = L_{f}^{-1}C_{\varphi} \sum_{f_{k}:|f_{s}(f_{k},b)-f_{l}| \leq \Delta f/2} ST_{x}(f_{k},b) e^{i2\pi f_{k}b} f_{k}^{-1} \Delta f_{k}.$$
 (15)

式 (4) 两边同时对 f 积分,并进行变量替换,可以得到

$$\int_0^\infty ST_x\left(f,b\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f b} f^{-1} \mathrm{d}f = \frac{1}{2} \int_0^\infty -\overline{\hat{\psi}\left(\xi\right)} \xi^{-1} \mathrm{d}\xi \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{x}\left(\zeta\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}b\zeta} \mathrm{d}\zeta.$$
 (16)

令  $C_{\psi} = \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} -\overline{\hat{\psi}(\xi)} \xi^{-1} \mathrm{d}\xi$ , 由上式得

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{x}\left(\zeta\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}b\zeta} \mathrm{d}\zeta = C_\psi^{-1} \int_0^\infty ST_x\left(f,b\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f b} f^{-1} \mathrm{d}f.$$
(17)

645





由于信号 x(t) 为实信号, 因此, 上式取实部得

$$x(b) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}\left[\int_0^\infty \hat{x}\left(\zeta\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}b\zeta} \mathrm{d}\zeta\right] = \operatorname{Re}\left[C_{\psi}^{-1} \int_0^\infty ST_x\left(f,b\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi f b} f^{-1} \mathrm{d}f\right].$$
(18)

把上式右端离散化,结合式 (13) 得到同步挤压 S 变换的逆变换表达式为

$$x(b) = \left[ \left( C_{\psi} C_{\varphi} \right)^{-1} \sum_{l} SSST_{x}(f_{l}, b) L_{f} \right].$$
(19)

用该逆变换式可以由同步挤压 S 变换结果重构原信号.

由于 S 变换和小波变换的表达式不同,本文对瞬时频率以及重构公式都作了重新定义. 同步挤压 S 变换结果的时间和频率都是线性分布的,这样的时频图更有利于人们理解和分析. 而基于小波变换的同步挤压变换使用的尺度 a 是 2 的指数函数,即  $a_j = 2^{j/n_v}$ ,其中  $n_v$ 是一个自定义的整数,用来决定尺度的个数. 根据尺度和频率之间的转换关系:  $f = f_s \cdot f_c/a$  ( $f_s$  是采样频率, $f_c$  为母小波中心频率),当把尺度转换为频率时,得到的频率显然不是线性分布的. 如果想得到频率线性分布的同步挤压变换结果,就必须采用特殊分布的尺度序列. 在下面的合成信号实验中,为了对小波变换和同步挤压变换与 S 变换和同步挤压 S 变换的结果进行直观比较,把小波变换和同步挤压变换结果转换成时间和频率线性分布的结果,本文选取了这样的尺度序列: 若小波中心频率为  $f_c$ ,尺度序列长度为  $N_a$ ,则尺度序列为  $c/N_a, c/(N_a - 1), \dots, c/3, c/2, c$ ,其中  $c = 2f_cN_a$ .

#### 3 合成信号实验

为了说明同步挤压 S 变换的优势, 分别用小波变换、S 变换、同步挤压变换和同步挤压 S 变换对 一段理论合成信号进行了处理. 合成信号 *x*(*t*) 由 3 个调频、调幅信号 *x*<sub>1</sub>(*t*), *x*<sub>2</sub>(*t*) 和 *x*<sub>3</sub>(*t*) 组成, 它们

646



图 2 不同时频变换方法的 x(t) 信号时频图

Figure 2 Time-frequency map of the synthetic signal, x(t), obtained using (a) WT, (b) ST, (c) SST, and (d) SSST

的数学表达式分别为

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + n(t),$$
  

$$x_1(t) = [2 + 0.2\cos(t)] \cdot \cos[2\pi (3t + 0.6\cos(t))],$$
  

$$x_2(t) = 0.6 [1 + 0.3\cos(2t)] \cdot \exp(-t/20) \cdot \cos[2\pi (5t + 0.6t^{1.8} + 0.3\sin(t))],$$
  

$$x_3(t) = 0.4\cos[2\pi (9t)],$$
  
(20)

其中, n(t) 为 Gauss 白噪声, 信号的时间变化范围取为  $t \in [0, 10]$ . 为了构造低幅度的高频信号分量, 将 各分量的幅度设成与其频率成反比, 即频率相对较高的分量, 幅值就相对低. 分量  $x_1(t)$  呈正弦变化, 频率最低, 幅值最高, 最大值为 2.2;  $x_2(t)$  的频率随着时间增加而逐渐变大, 幅值随着频率升高而逐渐 减小, 并小于  $x_1(t)$  的幅值;  $x_3(t)$  的幅值为最小且不随时间变化, 频率也为定值, 并大于  $x_1(t)$  的频率. 这 3 个分量的时域波形如图 1(a)~(c) 所示, 它们随时间的变化规律各不相同, 它们的合成信号 x(t) 如 图 1(d) 所示, 其幅度和频率都随时间而变化.

对合成信号 *x*(*t*) 分别进行小波变换、S 变换、同步挤压变换和同步挤压 S 变换. 在作小波变换和同步挤压变换时, 我们选取的母小波为 Morlet 小波. 为了便于对这 4 种变换结果的比较, 将变换结果的纵坐标都变成线性化的频率. 图 2 是 4 种变换的时频图, 可以看出, 在小波变换和 S 变换的时频图



**Figure 3** (Color online) Reconstruction signal from the SSST result of the synthetic signal x(t). (a) The original signal x(t) and its reconstruction signal; (b) reconstruction errors

上,信号能量被模糊化,分布在包含真实频率的某个范围内;而在同步挤压变换和同步挤压 S 变换的时频图上,由于对小波变换和 S 变换的能量进行了"挤压",把原本模糊化的信号能量重新归位到了实际频率处,极大地提高了时频变换的频率分辨率.相对于 x<sub>1</sub>(t)和 x<sub>2</sub>(t), x<sub>3</sub>(t)的能量较弱频率较高,在小波变换和同步挤压变换的时频图上几乎难以反映出来,但在 S 变换和同步挤压 S 变换的时频图上, x<sub>3</sub>(t)分量被很清晰地反映出来,且同步挤压 S 变换比 S 变换具有明显高的分辨率.可见,同步挤压变换虽然提高了时频变换的分辨率,但对高频弱振幅信号分量反映不好; S 变换虽然对强振幅和弱振幅信号分量都有较好的反映,但时频分辨率不高;而同步挤压 S 变换既提高了时频变换的分辨率,又同时对强振幅和弱振幅信号分量都有较好的反映.

图 3 给出了利用同步挤压 S 变换结果对原合成信号进行重构的结果,其中,图 3(a) 是重构信号 与原信号的比较,图 3(b) 是重构误差.可以看出,利用式 (19) 的逆变换公式,可以对信号同步挤压 S 变换结果进行反变换,重构原信号,在噪声存在的情况下,重构误差很小.

#### 4 结论

本文提出了同步挤压 S 变换, 推导出了该变换及其逆变换的数学表达式. 同步挤压 S 变换兼顾了 S 变换和同步挤压变换的优势, 与 S 变换和小波变换相比, 极大地提高了时频变换的分辨率; 与小波变换和同步挤压变换相比, 能够较好地反映信号中高频弱振幅分量的时频特征.

#### 参考文献

<sup>1</sup> Daubechies I, Lu J, Wu H T. Synchrosqueezed wavelet transforms: an empirical mode decomposition-like tool. Appl Comput Harmon Anal, 2011, 30: 243–261

- 2 Wu H T, Chan Y H, Lin Y T, et al. Using synchrosqueezing transform to discover breathing dynamics from ECG signals. Appl Comput Harmon Anal, 2014, 36: 354–359
- 3 Thakur G, Wu H T. Synchrosqueezing-based recovery of instantaneous frequency from nonuniform samples. SIAM J Math Anal, 2011, 43: 2078–2095
- 4 Montejo L A, Vidot-Vega A L. Synchrosqueezed wavelet transform for frequency and damping identification from noisy signals. Smart Struct Syst, 2012, 9: 441–459
- 5 Meignen S, Oberlin T, McLaughlin S. A new algorithm for multicomponent signals analysis based on synchrosqueezing: with an application to signal sampling and denoising. IEEE Trans Signal Process, 2012, 60: 5787–5798
- 6 Feng Z P, Chen X W, Liang M. Iterative generalized synchrosqueezing transform for fault diagnosis of wind turbine planetary gearbox under nonstationary conditions. Mech Syst Signal Process, 2015, 52–53: 360–375
- 7 Wang P, Gao J H, Wang Z G. Time–frequency analysis of seismic data using synchrosqueezing transform. IEEE Geosci Remote Sens Lett, 2014, 11: 2042–2044
- 8 Roberto H, Han J J, van der Baan M. Applications of the synchrosqueezing transform in seismic time-frequency analysis. Geophysics, 2014, 79: 55–64
- 9 Zhang J Z, Liu H, Huang Z L, et al. A synchrosqueezing transform based time-frequency analysis on seismic signals of hydrate reservoirs. Marine Geol Front, 2015, 31: 23–29 [张建中, 刘晗, 黄忠来, 等. 基于同步挤压变换的水合物储 层地震信号时频分析. 海洋地质前沿, 2015, 31: 23–29]
- 10 Thakur G, Brevdo E, Fučkar N S, et al. The synchrosqueezing algorithm for time-varying spectral analysis: robustness properties and new paleoclimate applications. Signal Process, 2013, 93: 1079–1094
- 11 Stockwell R G. S-transform analysis of gravity wave activity from a small scale network of airglow imagers. Dissertation for Ph.D. Degree. Ontario: University of Western Ontario, 1999

# Synchrosqueezing S-transform

Zhonglai HUANG<sup>1,2</sup> & Jianzhong ZHANG<sup>1,2\*</sup>

Key Lab of Submarine Geosciences and Prospecting Techniques, Ministry of Education, Qingdao 266100, China;
 College of Marine Geo-sciences, Ocean University of China, Qingdao 266100, China
 \*E-mail: zhangjz@ouc.edu.cn

**Abstract** The wavelet transform (WT) has been widely used as an effective tool for time-frequency (T-F) analysis, but its T-F resolution is not satisfactory in many cases. Based on solid mathematical foundations, a recent synchrosqueezing transform (SST) can obtain high-resolution T-F spectrum by squeezing (reassigning) the result of the WT. However, when the amplitude of high-frequency components of a signal is low, it is difficult to identify the components either on the WT spectrum or on the SST spectrum that is based on the WT result. In contrast to WT, S-transform (ST) is able to better display the high-frequency, low-amplitude components of a signal and realize lossless inverse transformation, but the resolution of ST is still not satisfactory enough. In order to improve the T-F resolution of ST, we present the synchrosqueezing S-transform (SSST) in this paper. After explaining the basic principles of SSST, we derive its formula and inverse transform. Then, we carry out WT, ST, SST, and SSST, respectively, on a synthetic data. The results show that SSST inherits the advantages of both ST and SST, which gives it the ability to greatly improve T-F resolution of signals and to better display T-F characteristics of high-frequency, low-amplitude components of signals.

**Keywords** synchrosqueezing S-transform, synchrosqueezing transform, S-transform, wavelet transform, time–frequency analysis



Zhonglai HUANG was born in 1982. He received his Ph.D. degree in Electronic Circuits and Systems from Xiamen University, Xiamen, in 2013. Currently, he is an assistant professor at Ocean University of China, Qingdao. His research interests include ground penetrating radar and seismic signal processing, electromagnetic and acoustic imaging, and inverse problems.



Jianzhong ZHANG was born in 1963. He received his B.S., M.S., and Ph.D. degrees in Applied Geophysics and Information Technology from Chengdu University of Technology, Chengdu, in 1985, 1988, and 2001, respectively. Currently, he is a professor at Ocean University of China, Qingdao. His research interests include computational geophysics, seismic imaging, tomography, inverse problems, and signal processing.