

基于相干性理论的非凸块稀疏压缩感知

王文东^①, 王建军^{②*}, 王尧^③, 张自力^{①④}

① 西南大学计算机与信息科学学院, 重庆 400715

② 西南大学数学与统计学院, 重庆 400715

③ 西安交通大学数学与统计学院, 西安 710049

④ School of Information Technology, Deakin University, VIC 3217, Australia

* 通信作者. E-mail: wjj@swu.edu.cn

收稿日期: 2015-05-18; 接受日期: 2015-06-08; 网络出版日期: 2016-02-23

国家自然科学基金 (批准号: 61273020)、中央高校基本业务费专项资金 (批准号: XDJK2015A007) 和国家高技术研究发展计划 (863) (批准号: 2013AA013801) 资助项目

摘要 限制等容性质 (restricted isometry property, RIP) 在压缩感知的理论研究中占据重要地位. 然而, 限制等容条件的验证却是一个复杂的组合优化问题. 为了克服这一问题, 本文将相干性理论引入非凸块稀疏压缩感知理论的研究, 得到了块结构信号恢复的两类充分条件. 所获结果将基于传统稀疏凸优化问题的相干性理论研究推广至了非凸块稀疏的情形. 通过构造一类块相干系数较小的测量矩阵, 非凸块稀疏压缩感知策略的有效性得到了数值实验的进一步验证.

关键词 块稀疏 压缩感知 RIP 块相干性 非凸极小化方法

1 引言

压缩感知^[1~3] (compressed/compressive sensing) 是近年来备受关注的一种全新的信号处理理论. 它利用信号的稀疏性或可压缩性, 突破了 Nyquist/Shannon 采样理论对信号带宽的限制, 将采样和压缩合二为一, 实现了信号的高效采集和精确重构. 该理论一经提出便引起学者广泛关注, 已在医疗成像^[4]、模式识别^[5]、图像处理^[6] 等诸多领域得到广泛应用.

从本质上讲, 给定测量矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ ($M \ll N$) 和观测信号 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$, 压缩感知旨在寻找欠定线性模型 $\mathbf{b} = \Phi \mathbf{x}$ 的一个最稀疏的解. 其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 是待重构的未知稀疏信号. 一个直接的方法是求解如下 ℓ_0 问题

$$\min \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \Phi \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (1)$$

此处 $\|\mathbf{x}\|_0$ 表示向量 \mathbf{x} 中非零元素的个数. 进一步, 若 $\|\mathbf{x}\|_0 \leq s$, 那么就称向量 \mathbf{x} 为 s -稀疏信号. 然而 ℓ_0 问题的求解却是一个 NP 难问题. 一种自然的想法是, 用如下的 ℓ_1 问题来替换

$$\min \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \Phi \mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (2)$$

引用格式: 王文东, 王建军, 王尧, 等. 基于相干性理论的非凸块稀疏压缩感知. 中国科学: 信息科学, 2016, 46: 376–390, doi: 10.1360/N112014-00404

为了刻画 ℓ_1 问题的理论特征, Candès 等 [7] 引入了限制等容性质 (restricted isometry property, RIP) 的概念. 即对于任意 s - 稀疏信号 \mathbf{x} , 若存在 $0 < \delta < 1$ 有

$$(1 - \delta)\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\Phi\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta)\|\mathbf{x}\|_2^2, \quad (3)$$

那么称矩阵 Φ 满足 RIP. 若记 $\delta_s = \min_{0 < \delta < 1} \delta$, 则称 δ_s 为矩阵 Φ 的 s - 阶限制等容常数 (restricted isometry constant, RIC). 他们还从理论角度指出, 当 $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$ 时, ℓ_1 问题有唯一的 s - 稀疏解. 此外, 由于 ℓ_1 问题的求解还是一个凸优化过程, 目前已有大量学者对其进行了广泛研究 [8~11].

稀疏性是压缩感知理论得以产生和发展的前提. 然而在现实世界中, 部分真实存在的信号还表现出诸多其他结构, 比如一类块稀疏信号, 其非零元素以块的形式出现. 这类信号的处理源自很多应用问题, 如彩色图像处理 [6]、稀疏信道估计 [12] 和源定位 [13] 等. 从数学上讲, 给定分块 $\tau = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_m\}$, 任意向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 都可以被描述为

$$\mathbf{x} = \left[\underbrace{x_1, \dots, x_{d_1}}_{\mathbf{x}^T[1]}, \underbrace{x_{d_1+1}, \dots, x_{d_1+d_2}}_{\mathbf{x}^T[2]}, \dots, \underbrace{x_{N-d_m+1}, \dots, x_N}_{\mathbf{x}^T[m]} \right]^T,$$

这里的 $\mathbf{x}[i]$ 表示向量 \mathbf{x} 的第 i 个子块. 当向量 \mathbf{x} 在分块 τ 下至多有 s 个非零块时, 称该向量为块 s - 稀疏信号, 并记为 $\|\mathbf{x}\|_{2,0} \leq s$. 进一步, 若每一分块均含有相同数目的元素, 那么称这样的分块为均匀分块, 记为 $\tau(m, d)$. 此处 m 表示分块的数目, d 表示分块尺度, 即每一分块所含的元素个数. 此时, 显然有 $N = md$. 相应地, 测量矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 可以被描述为

$$\Phi = \left[\underbrace{\phi_1, \dots, \phi_d}_{\Phi[1]}, \underbrace{\phi_{d+1}, \dots, \phi_{2d}}_{\Phi[2]}, \dots, \underbrace{\phi_{N-d+1}, \dots, \phi_N}_{\Phi[m]} \right].$$

若未加说明, 本文后续部分所指的分块皆指代均匀分块. 事实上, 传统的压缩感知方法并不能有效地处理这类块稀疏信号, 其原因在于它们忽视了信号本身深层的稀疏结构. 为此, 许多学者对传统的压缩感知方法进行了针对性的改良. 在文献 [14] 中, Eldar 和 Mishali 提出并研究了如下的 ℓ_2/ℓ_1 问题:

$$\min \|\mathbf{x}\|_{2,1} \quad \text{s.t.} \quad \Phi\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (4)$$

其中 $\min \|\mathbf{x}\|_{2,1} = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{x}[i]\|_2$. 此外, 借鉴传统的 RIP, 他们还引入了 Block-RIP 的概念, 并以此建立了块稀疏信号重构的一般理论, 为块稀疏问题的进一步研究奠定了理论基础.

近年来, 关于非凸压缩感知的研究结果 [15~18] 表明: $\ell_q (0 < q < 1)$ 问题的求解可以显著地减少采样次数. 受此启发, 部分学者 [6, 19, 20] 研究了如下的 $\ell_2/\ell_q (0 < q \leq 1)$ 问题:

$$\min \|\mathbf{x}\|_{2,q}^q \quad \text{s.t.} \quad \Phi\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (5)$$

此处, $\min \|\mathbf{x}\|_{2,q}^q = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{x}[i]\|_2^q$. 在实际应用中, 我们所得观测信号难免会受到噪声干扰. 因此, 更多地考虑如下带噪声的 $\ell_2/\ell_q (0 < q \leq 1)$ 问题

$$\min \|\mathbf{x}\|_{2,q}^q \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{b} = \Phi\mathbf{x} + \xi, \quad \|\xi\|_2 \leq \epsilon. \quad (6)$$

早在文献 [6] 中, Marjadar 和 Ward 已将 $\ell_2/\ell_q (0 < q \leq 1)$ 方法应用到彩色图像处理, 进一步提升了图像的重构质量. 然而他们的研究仅仅从实验角度展开, 缺乏对所用方法严格的理论分析. 其后, Wang 等 [19, 20] 从理论角度对 $\ell_2/\ell_q (0 < q \leq 1)$ 问题进行了研究, 得到了许多漂亮的结果.

RIP 理论在压缩感知的理论研究中占据重要地位. 然而, 在实际应用中, 依据 RIP 理论来设计测量矩阵却是一件极其困难的事. 即使针对给定的矩阵, 也很难在有效的时间内验证 RIP 条件. 因此, 建立易于实现的非 RIP 理论成为了压缩感知理论进一步发展的突破口. 自然地, 部分学者将注意力转移到了矩阵相干性 (coherence) 的研究上. 事实上, 同等条件下, 一个矩阵的相干系数往往要比其 RIC 更容易计算. 具体来讲, 关于矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 的相干系数, 有如下定义:

$$u = \max_{1 \leq i < j \leq N} |\langle \phi_i, \phi_j \rangle|.$$

不难发现, 为了得到矩阵的相干系数, 只需要对矩阵列向量的 C_N^2 个组合进行计算. 而 $2s$ - 阶 RIC 的计算则涉及矩阵所有可能的 C_N^{2s} 个子矩阵. 以 $N = 100, s = 10$ 为例, 此时 $2s$ - 阶 RIC 常数的计算规模约为 7.7×10^{14} , 而相干系数的计算规模仅约为 4.9×10^3 . 相较 RIC, 相干系数的计算优势非常明显. 在文献 [21] 中, 通过限制测量矩阵为两个正交矩阵的组合, Donoho 和 Huo 指出, 当 $u < \frac{1}{2s-1}$ 时, ℓ_1 问题的求解可以实现任意 s - 稀疏信号的精确重构. 其后, Gribonval 和 Nielsen [22] 将测量矩阵推广到了更为一般的情形. 而在文献 [23] 中, Cai 等指出, 条件 $u < \frac{1}{2s-1}$ 是最佳的, 而且该条件同样适用于 ℓ_1 问题的鲁棒重构分析. 此外, Eldar 等 [24] 还将传统的相干性进行了泛化, 提出了块相干性 (block coherence) 的概念. 同时, 他们的研究表明: 当测量矩阵满足一定的块相干性条件时, ℓ_2/ℓ_1 问题有唯一的块 s - 稀疏解. 最近, Calderbank 等 [25] 对矩阵的块相干性理论做了较为全面的研究, 获得了许多新的结果.

据作者所知, 目前关于相干性理论在非凸压缩感知理论方面的研究较少, 而本文的工作可以认为是这一方向研究的积极尝试. 以块相干性理论为基础, 对 ℓ_2/ℓ_q ($0 < q \leq 1$) 问题进行了进一步研究. 首先, 针对块稀疏信号, 从理论角度建立了其精确重构的充分条件, 该条件囊括了文献 [26] 中定理 3.5 的结果. 其次, 针对一般块结构信号, 给出了其鲁棒重构的严格数学刻画, 所获结果表明: ℓ_2/ℓ_q ($0 < q \leq 1$) 方法的重构条件与块相干系数, 参数 s 和 q ($0 < q \leq 1$) 相关, 而重构效果则主要依赖于最优 s - 块逼近误差和噪声水平. 最后, 数值实验对我们的理论结果进行了进一步的验证和支撑. 考虑到重构算法的稳定性和可操作性, 相比 RIP 理论, 本文的研究结果更具一般性, 为块稀疏压缩感知理论的深入发展提供了一定的理论参考.

2 预备知识

为了方便介绍后续内容, 首先给出一些记号.

- 给定非空指标集 E , 记 $|E|$ 为指标集 E 中的元素个数.
- 给定正整数 N , 记 $[N] = \{1, 2, 3, \dots, N\}$, 并记 I_N 为 $N \times N$ 维的单位矩阵.
- 给定矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$, 记 $\ker(\Phi) = \{\mathbf{w} | \Phi \mathbf{w} = \mathbf{0}\}$ 为矩阵 Φ 的零空间.
- 给定分块 $\tau(m, d)$ 和非空指标集 $E \subseteq [m]$, 记

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_E &= [\mathbf{x}^T[l_1], \mathbf{x}^T[l_2], \mathbf{x}^T[l_3], \dots, \mathbf{x}^T[l_{|E|}]]^T, \\ \Phi_E &= [\Phi[l_1], \Phi[l_2], \Phi[l_3], \dots, \Phi[l_{|E|}]], \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M$, $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$, 而 $l_i \in E$ 且满足 $1 \leq l_1 < l_2 < l_3 \cdots < l_{|E|} \leq m$. 进一步, 给定正整数 $s \in [m]$, 记向量 \mathbf{x} 的最优 s - 块逼近 $\mathbf{x}_s = \arg \min_{\|\mathbf{y}\|_{2,0} \leq s} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$.

- 给定实数 $\epsilon \geq 0$, 记 $B_\epsilon = \{\mathbf{x} \mid \|\Phi \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \leq \epsilon\}$, 其中 $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$.

此外, 为叙述的简洁性, 谈及矩阵 (或测量矩阵) Φ , 皆假设: 对于任意 $i \in [m]$, 有 $(\Phi[i])^T \Phi[i] = I_d$. 接下来, 给出与本文内容密切相关的一些定义和引理.

定义1 若对于任意向量 $\mathbf{w} \in \ker(\Phi) \setminus \{\mathbf{0}\}$, 都有

$$\|\mathbf{w}_E\|_{2,q} < \|\mathbf{w}_{E^c}\|_{2,q}, \quad \text{对任意的 } E \subseteq [m], \quad |E| \leq s, \quad (7)$$

那么, 称矩阵 Φ 具有 l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) 型零空间性质.

直观上, 可以将 l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) 型零空间性质理解为, 位于矩阵 Φ 零空间中的非零向量的分块分布较为均匀, 不会明显地集中于某 s 个分块上. 利用上述性质, 有下述引理

引理1 问题 (5) 有唯一块 s - 稀疏解的充要条件是测量矩阵 Φ 具有 l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) 型零空间性质.

证明 必要性. 给定指标集 $E \subseteq [m]$ 且满足 $|E| \leq s$, 那么对于任意向量 $\mathbf{w} \in \ker(\Phi) \setminus \{\mathbf{0}\}$ 有, $\mathbf{z}^* = \mathbf{w}_E$. 此处 \mathbf{z}^* 为下述优化问题 (8) 的最优解, 即

$$\mathbf{z}^* = \min \|\mathbf{z}\|_{2,q}^q \quad \text{s.t.} \quad \Phi \mathbf{z} = \Phi \mathbf{w}_E. \quad (8)$$

进一步, 由于 $\Phi \mathbf{w}_{E^c} = \Phi \mathbf{w}_E$, \mathbf{w}_E 为问题 (8) 的唯一最优解, 从而有 $\|\mathbf{w}_E\|_{2,q} < \|\mathbf{w}_{E^c}\|_{2,q}$.

充分性. 对于任意给定的块 s 稀疏信号 \mathbf{x} , 记其非零块指标集为 E , 显然有 $E \subseteq [m]$ 且满足 $|E| \leq s$. 对于任意 $\mathbf{y} \in \{\mathbf{z} \mid \Phi \mathbf{z} = \Phi \mathbf{x}, \mathbf{z} \neq \mathbf{x}\}$, 记 $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. 那么, 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_{2,q}^q &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_E\|_{2,q}^q + \|\mathbf{y}_E\|_{2,q}^q \\ &= \|\mathbf{w}_E\|_{2,q}^q + \|\mathbf{y}_E\|_{2,q}^q \\ &< \|\mathbf{w}_{E^c}\|_{2,q}^q + \|\mathbf{y}_E\|_{2,q}^q \\ &= \|\mathbf{y}_{E^c}\|_{2,q}^q + \|\mathbf{y}_E\|_{2,q}^q \\ &= \|\mathbf{y}\|_{2,q}^q. \end{aligned}$$

综上, 引理 1 证毕.

零空间性质在理论上完全刻画了 l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) 问题精确重构块稀疏信号时测量矩阵的理论特征. 但是, 依据零空间性质来设计测量矩阵, 无论在理论还是计算方面, 都是一个很难实现的过程. 为此, 人们考虑了另外一种刻画方式, 即所谓块相干性. 下面给出与块相干性密切相关的两个定义.

定义2 定义矩阵 Φ 的 l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) 型相干函数^[27] 为

$$u_{q|\tau}(s) = \max_{1 \leq i \leq m} \max \left\{ \frac{1}{d} \left(\sum_{j \in S} \|(\Phi[i])^T \Phi[j]\|_2^q \right)^{\frac{1}{q}}, |S| = s, i \notin S \right\}.$$

定义3 定义测量矩阵 Φ 的块相干系数^[24] 为

$$u_\tau = \max_{1 \leq i < j \leq m} \frac{1}{d} \|(\Phi[i])^T \Phi[j]\|_2.$$

当 $s = 1$ 时, 有 $u_{q|_T}(s) = u_\tau$. 从理论角度来看, l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) 型相干函数的定义更具价值. 当 s ($s \ll m$) 较大时, l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) 型相干函数的计算量非常大, 而块相干系数 u_τ 的计算规模与参数 s 无关. 因此, 相比 l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) 型相干函数, 块相干系数 u_τ 的定义更具应用价值.

引理2 给定指标集 $E \subseteq [m]$ 且满足 $|E| = s$. 那么, 对于矩阵 $(\Phi_E)^T \Phi_E$ 的任意特征值 λ , 有

$$|\lambda - 1| \leq (s - 1)du_\tau. \quad (9)$$

证明 设 \mathbf{u}_E 是与特征值 λ 对应的一个特征向量. 令 $\ell = \arg \max_{j \in E} \|\mathbf{u}[j]\|_2$. 那么, 有

$$\sum_{j \in E} (\Phi[\ell])^T \Phi[j] \mathbf{u}[j] = \lambda \mathbf{u}[\ell].$$

进一步, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{j \in E \setminus \{\ell\}} (\Phi[\ell])^T \Phi[j] \mathbf{u}[j] &= (\lambda I_d - (\Phi[\ell])^T \Phi[\ell]) \mathbf{u}[\ell] \\ &= (\lambda - 1) \mathbf{u}[\ell]. \end{aligned}$$

从而, 有

$$\begin{aligned} |\lambda - 1| &\leq \frac{\sum_{j \in E \setminus \{\ell\}} \|(\Phi[\ell])^T \Phi[j]\|_2 \|\mathbf{u}[j]\|_2}{\|\mathbf{u}[\ell]\|_2} \\ &\leq \sum_{j \in E \setminus \{\ell\}} \|(\Phi[\ell])^T \Phi[j]\|_2 \\ &\leq (s - 1)du_\tau. \end{aligned}$$

引理 2 证毕.

引理3 对于任意块 s - 稀疏信号 \mathbf{x} , 有

$$1 - (s - 1)du_\tau \leq \frac{\|\Phi \mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \leq 1 + (s - 1)du_\tau. \quad (10)$$

证明 对于任意块 s - 稀疏信号 \mathbf{x} , 必存在一个指标集 $E \subseteq [m]$ 且满足 $|E| \leq s$, 使得 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_E$. 进一步, 令 λ_{\min} 和 λ_{\max} 分别为矩阵 $(\Phi_E)^T \Phi_E$ 的最小和最大特征值. 那么, 对于 $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, 由引理 2 可得

$$|\lambda - 1| \leq (s - 1)du_\tau,$$

即为

$$1 - (s - 1)du_\tau \leq \lambda \leq 1 + (s - 1)du_\tau.$$

由线性代数知识, 有

$$\lambda_{\min} \leq \frac{\|\Phi_E \mathbf{x}_E\|_2^2}{\|\mathbf{x}_E\|_2^2} \leq \lambda_{\max}.$$

从而, 有

$$1 - (s - 1)du_\tau \leq \frac{\|\Phi \mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \leq 1 + (s - 1)du_\tau.$$

引理 3 证毕.

3 块结构信号重构的充分条件

在这一部分, 着重研究了块稀疏信号精确重构和一般块结构信号鲁棒重构的充分条件. 为此, 首先给出块稀疏信号精确重构的一个充分条件.

定理 1 若测量矩阵 Φ 满足

$$(u_{q|\tau}(s - 1))^q + (u_{q|\tau}(s))^q < \frac{1}{d^q}, \quad (11)$$

那么, 问题 (5) 的求解可以实现任意块 s - 稀疏信号的精确重构.

注 1 当 $q = 1$ 时, 得到定理 1 的一种特殊情形, 它适用于处理 l_2/l_1 问题. 特别是, 当 $q = 1, d = 1$ 时, 我们的结果与文献 [26] 中的定理 3.5 一致, 它适用于处理传统的 l_1 问题.

注 2 由 $u_{q|\tau}(s)$ 的定义可知, $u_{q|\tau}(s) \leq s^{\frac{1}{q}} u_\tau$. 从而作为定理 1 的一个延伸, 容易得到结论: 定理 1 的结果在 $u_\tau < \frac{1}{d(2s-1)^{\frac{1}{q}}}$ 时同样成立. 该结论的证明过程较为简单, 把它留给感兴趣的读者.

证明 对于任意 $\mathbf{w} \in \ker(\Phi^T \Phi) / \{\mathbf{0}\}$, 有 $\Phi^T \Phi \mathbf{w} = \mathbf{0}$. 因此对于任意 $i \in E$, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{w}[i] &= \sum_{j=1, j \neq i}^m (\Phi[j])^T \Phi[i] \mathbf{w}[j] \\ &= - \sum_{k \in E^c} (\Phi[k])^T \Phi[i] \mathbf{w}[k] - \sum_{j \in E, j \neq i} (\Phi[j])^T \Phi[i] \mathbf{w}[j], \end{aligned}$$

其中 $E \subseteq [m]$ 且满足 $|E| = s$. 故

$$\|\mathbf{w}[i]\|_2^q \leq \sum_{k \in E^c} \|(\Phi[k])^T \Phi[i]\|_2^q \|\mathbf{w}[k]\|_2^q + \sum_{j \in E, j \neq i} \|(\Phi[j])^T \Phi[i]\|_2^q \|\mathbf{w}[j]\|_2^q, \quad (12)$$

将 (12) 式两端在指标集 E 中求和, 得

$$\begin{aligned} \sum_{i \in E} \|\mathbf{w}[i]\|_2^q &\leq \sum_{i \in E} \sum_{k \in E^c} \|(\Phi[k])^T \Phi[i]\|_2^q \|\mathbf{w}[k]\|_2^q + \sum_{i \in E} \sum_{j \in E, j \neq i} \|(\Phi[j])^T \Phi[i]\|_2^q \|\mathbf{w}[j]\|_2^q \\ &\leq d^q (u_{q|\tau}(s))^q \sum_{k \in E^c} \|\mathbf{w}[k]\|_2^q + d^q (u_{q|\tau}(s - 1))^q \sum_{i \in E} \|\mathbf{w}[i]\|_2^q, \end{aligned} \quad (13)$$

从而有

$$(1 - d^q (u_{q|\tau}(s - 1))^q) \|\mathbf{w}_E\|_2^q \leq (u_{q|\tau}(s))^q d^q \|\mathbf{w}_{E^c}\|_2^q. \quad (14)$$

由 (11) 和 (14) 式, 可得

$$\|\mathbf{w}_E\|_2^q \leq \frac{(u_{q|\tau}(s))^q d^q}{1 - d^q (u_{q|\tau}(s - 1))^q} \|\mathbf{w}_{E^c}\|_2^q < \|\mathbf{w}_{E^c}\|_2^q. \quad (15)$$

从而借助引理 1, 定理 1 得证.

定理 1 给出了块稀疏信号精确重构的充分条件. 对于一般信号 (或含噪声) 的重构, 能否找到类似的结果呢? 下面的定理对这一问题给出了肯定的回答.

定理 2 若测量矩阵 Φ 满足

$$u_\tau < \frac{1}{d(s^{\frac{1}{q}} + s - 1)}, \quad (16)$$

那么, 对于任意 $\mathbf{x} \in B_\epsilon$ 和问题 (6) 的解 \mathbf{x}^\star , 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^\star - \mathbf{x}\|_{2,q}^q &\leq C_1 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_{2,q}^q + C_2 \epsilon^q, \\ \|\mathbf{x}^\star - \mathbf{x}\|_2^q &\leq C_3 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_{2,q}^q + C_4 \epsilon^q. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2sd^q(u_\tau)^q + 2(1 - (s-1)du_\tau)^q}{(1 - (s-1)du_\tau)^q - sd^q(u_\tau)^q}, & C_2 &= \frac{2^{q+1}s^{1-\frac{q}{2}}(1 + (s-1)du_\tau)^{\frac{q}{2}}}{(1 - (s-1)du_\tau)^q - sd^q(u_\tau)^q}, \\ C_3 &= \frac{2s^{\frac{q}{2}}d^q(u_\tau)^q + 2(1 - (s-1)du_\tau)^q}{(1 - (s-1)du_\tau)^q - sd^q(u_\tau)^q}, & C_4 &= \frac{2^q(1 + s^{1-\frac{q}{2}})(1 + (s-1)du_\tau)^{\frac{q}{2}}}{(1 - (s-1)du_\tau)^q - sd^q(u_\tau)^q}. \end{aligned}$$

注 3 上述定理中的 (16) 式刻画了一般块结构信号重构的理论要求, 反映了信号重构与相干性之间的关系. 具体来讲, 当 $q \rightarrow 0^+$ 时, $u_\tau \rightarrow 0^+$, 此时, 测量矩阵等价于一个正交矩阵, 这与 ℓ_2/ℓ_0 方法对测量矩阵的要求一致. 而当 $q \rightarrow 1^-$ 时, 块相干系数与 $d \cdot s$ 成反比, 这与 ℓ_2/ℓ_1 方法的重构条件吻合.

注 4 定理 2 中的结果给出了一般块结构信号重构误差的上界估计. 它表明: 误差精度主要受最优 s - 块逼近误差和噪声水平控制. 作为定理 2 的两个特例, 当 $q = 1$ 时, 获得了 ℓ_2/ℓ_1 问题鲁棒重构的误差估计, 该结果囊括了文献 [24] 中定理 3 的结论. 而当 $0 < q < 1$ 时, 得到了非凸块稀疏压缩感知鲁棒重构的一个充分条件. 特别是, 当 \mathbf{x} 为块 s - 稀疏信号时, 有以下重要结论.

推论 1 若测量矩阵 Φ 满足

$$u_\tau < \frac{1}{d(s^{\frac{1}{q}} + s - 1)},$$

那么, 对于任意块 s - 稀疏信号 \mathbf{x} 和问题 (6) 的解 \mathbf{x}^\star , 有

$$\|\mathbf{x}^\star - \mathbf{x}\|_{2,q} \leq (C_2)^{\frac{1}{q}} \epsilon,$$

或

$$\|\mathbf{x}^\star - \mathbf{x}\|_2 \leq (C_4)^{\frac{1}{q}} \epsilon.$$

下面, 给出定理 2 的证明.

证明 首先取 $E = \{i \mid \|\mathbf{x}_s[i]\|_2 \neq 0\}$. 对于任意的 $\mathbf{x} \in B_\epsilon$, 令 $\mathbf{h} = \mathbf{x}^\star - \mathbf{x}$. 于是

$$\|\Phi \mathbf{h}_E\|_2^2 = \langle \Phi \mathbf{h}_E, \Phi \mathbf{h} - \Phi \mathbf{h}_{E^c} \rangle \leq 2\epsilon \|\Phi \mathbf{h}_E\|_2 + |\langle \Phi \mathbf{h}_E, \Phi \mathbf{h}_{E^c} \rangle|. \quad (17)$$

对于 (17) 式右边第 2 项, 有

$$|\langle \Phi \mathbf{h}_E, \Phi \mathbf{h}_{E^c} \rangle| = \left| \left\langle \sum_{j \in E^c} \Phi[j] \mathbf{h}[j], \sum_{i \in E} \Phi[i] \mathbf{h}[i] \right\rangle \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{j \in E^c} \sum_{i \in E} \mathbf{h}^T[j] (\Phi[j])^T \Phi[i] \mathbf{h}[i] \right| \\
&\leq \sum_{j \in E^c} \sum_{i \in E} \|(\Phi[j])^T \Phi[i]\|_2 \|\mathbf{h}[i]\|_2 \|\mathbf{h}[j]\|_2 \\
&\leq \sum_{j \in E^c} \|\mathbf{h}[j]\|_2 \sum_{i \in E} \|(\Phi[j])^T \Phi[i]\|_2 \|\mathbf{h}[i]\|_2 \\
&\leq s^{\frac{1}{2}} du_\tau \|\mathbf{h}_E\|_2 \|\mathbf{h}_{E^c}\|_{2,q}, \tag{18}
\end{aligned}$$

由于 \mathbf{x}^\star 是问题 (5) 的最优解, 故

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}_s\|_{2,q}^q + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_{2,q}^q = \|\mathbf{x}\|_{2,q}^q &\geq \|\mathbf{x}^\star\|_{2,q}^q = \|\mathbf{x}_s + \mathbf{h}_E\|_{2,q}^q + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s + \mathbf{h}_{E^c}\|_{2,q}^q \\
&\geq \|\mathbf{x}_s\|_{2,q}^q - \|\mathbf{h}_E\|_{2,q}^q + \|\mathbf{h}_{E^c}\|_{2,q}^q - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_{2,q}^q,
\end{aligned}$$

从而

$$\|\mathbf{h}_{E^c}\|_{2,q}^q \leq 2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_{2,q}^q + \|\mathbf{h}_E\|_{2,q}^q.$$

由不等式 $\|\mathbf{h}_E\|_{2,q} \leq s^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|\mathbf{h}_E\|_2$, 可得

$$\|\mathbf{h}_{E^c}\|_{2,q}^q \leq 2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_{2,q}^q + s^{1-\frac{q}{2}}\|\mathbf{h}_E\|_2^q. \tag{19}$$

联合 (17)~(19) 式, 有

$$\|\Phi \mathbf{h}_E\|_2^{2q} \leq 2^q \epsilon^q \|\Phi \mathbf{h}_E\|_2^q + s^{\frac{q}{2}} d^q (u_\tau)^q \|\mathbf{h}_E\|_2^q \left(2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_{2,q}^q + s^{1-\frac{q}{2}}\|\mathbf{h}_E\|_2^q \right). \tag{20}$$

由引理 3 知

$$1 - (s-1)du_\tau \leq \frac{\|\Phi \mathbf{h}_E\|_2^2}{\|\mathbf{h}_E\|_2^2} \leq 1 + (s-1)du_\tau. \tag{21}$$

联合 (20) 和 (21) 式, 得

$$\left((1 - (s-1)du_\tau)^q - sd^q (u_\tau)^q \right) \|\mathbf{h}_E\|_2^q \leq 2s^{\frac{q}{2}} d^q (u_\tau)^q \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_{2,q}^q + 2^q (1 + (s-1)du_\tau)^{\frac{q}{2}} \epsilon^q.$$

利用定理假设, 有

$$\|\mathbf{h}_E\|_2^q \leq \frac{2s^{\frac{q}{2}} d^q (u_\tau)^q}{(1 - (s-1)du_\tau)^q - sd^q (u_\tau)^q} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_{2,q}^q + \frac{2^q (1 + (s-1)du_\tau)^{\frac{q}{2}}}{(1 - (s-1)du_\tau)^q - sd^q (u_\tau)^q} \epsilon^q. \tag{22}$$

联合 (19) 和 (22) 式有

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}^\star - \mathbf{x}\|_{2,q}^q &= \|\mathbf{h}_E\|_{2,q}^q + \|\mathbf{h}_{E^c}\|_{2,q}^q \\
&\leq 2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_{2,q}^q + 2s^{1-\frac{q}{2}}\|\mathbf{h}_E\|_2^q \\
&\leq \frac{2sd^q (u_\tau)^q + 2(1 - (s-1)du_\tau)^q}{(1 - (s-1)du_\tau)^q - sd^q (u_\tau)^q} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_{2,q}^q + \frac{2^{q+1} s^{1-\frac{q}{2}} (1 + (s-1)du_\tau)^{\frac{q}{2}}}{(1 - (s-1)du_\tau)^q - sd^q (u_\tau)^q} \epsilon^q.
\end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^\star - \mathbf{x}\|_2^q &\leq \|\mathbf{h}_E\|_2^q + \|\mathbf{h}_{E^c}\|_2^q \\ &\leq 2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_{2,q}^q + (1 + s^{1-\frac{q}{2}})\|\mathbf{h}_E\|_2^q \\ &\leq \frac{2s^{\frac{q}{2}}d^q(u_\tau)^q + 2(1 - (s-1)du_\tau)^q}{(1 - (s-1)du_\tau)^q - sd^q(u_\tau)^q}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|_{2,q}^q + \frac{2^q(1 + s^{1-\frac{q}{2}})(1 + (s-1)du_\tau)^{\frac{q}{2}}}{(1 - (s-1)du_\tau)^q - sd^q(u_\tau)^q}\epsilon^q. \end{aligned}$$

综上, 定理 2 证毕.

依据定理 2 的块相干性条件来设计合适的测量矩阵, 目前来说是比较困难的. 然而, 直观地来看, 矩阵的块相干系数越小, 定理 2 的条件越容易得到满足. 众所周知, 在传统的相干性理论框架下, 矩阵的相干系数受 Welch 下界^[28]约束, 而满足 Welch 下界的矩阵被证明也是大量存在的. 这启示我们, 为了构造符合定理 2 条件的测量矩阵, 可以尝试解答下面两个问题:

- (1) 矩阵的块相干系数是否也存在类似的 Welch 下界?
- (2) 如果上述下界存在, 是否存在块相干系数等于 (或非常逼近) 该下界的矩阵?

下面的定理完美地回答了上述两个问题.

定理3 (文献 [25] 中的定理 2.3) 对于矩阵 Φ , 有

$$u_\tau \geq \sqrt{\frac{N - M}{Md(N - d)}}, \quad \text{其中 } N = md.$$

证明 具体证明过程可以参考文献 [25] 中的定理 2.3, 此处略去证明.

定理4 (文献 [25] 中的定理 2.6) 设矩阵 $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{\frac{M}{d} \times m}$ 为一个 Grassmann 矩阵, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ 为一个正交矩阵. 令矩阵 $\Phi = \mathbf{G} \otimes \mathbf{D}$, 有

$$u_\tau = \sqrt{\frac{N - M}{Md(N - d)}},$$

其中 $\frac{M}{d}$ 为正整数, \otimes 表示 Kronecker 积.

证明 具体证明过程可以参考文献 [25] 中的定理 2.6, 此处亦略去证明.

定理 3 给出了块相干系数类似的 Welch 下界. 此处不妨记为 Block-Welch 下界. 不难发现, 当 $d = 1$ 时, Block-Welch 下界即 Welch 下界. 而定理 4 不仅肯定地回答了问题 (2) 中矩阵的存在性, 而且为这类矩阵的构造提供了理论保障. 本文的后续部分将重点研究如何构造这类矩阵, 以及通过这类矩阵对非凸块稀疏算法的验证. 为了叙述方便, 不妨将这类矩阵 $\Phi (= \mathbf{G} \otimes \mathbf{D})$ 称为 Kronecker 合成矩阵. 定理 4 中出现的 Grassmann 矩阵, 实际上泛指相干系数为 Welch 下界的一类矩阵, 在不引起误解的情况下, 将相干系数非常接近 Welch 下界的矩阵也称做 Grassmann 矩阵. 目前已有许多学者对 Grassmann 矩阵进行了研究^[29~31]. 例如, 在文献 [29] 中, Tropp 等利用交替投影法 (alternating projection method) 对一般矩阵进行了优化处理, 构造出了一类与原始矩阵同维度的 Grassmann 矩阵. 最近, Xu^[31] 设计的确定性矩阵也得到了类似的结果.

4 数值实验

为了验证所获相干性理论的有效性, 分别做了两组实验: 测量矩阵构造实验和算法对比实验. 实

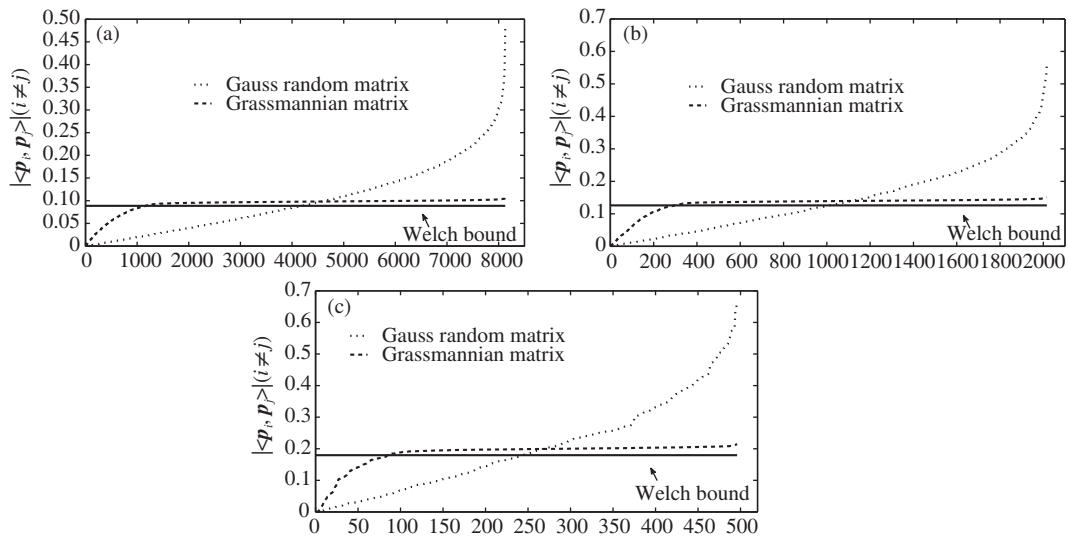


图 1 相干性对比 ($|\langle p_i, p_j \rangle| (i \neq j)$ 的数值按升序排列)

Figure 1 Comparisons of the coherence (the value of $|\langle p_i, p_j \rangle| (i \neq j)$ was sorted in ascending order). (a) $d = 2$; (b) $d = 4$; (c) $d = 8$

实验中, 固定信号长度 $N = md = 256$, 采样次数 $M = 128$. 所有实验均在 CPU 为英特尔酷睿双核 i5-4200M (2.50 GHz), 内存为 4 GB 的电脑上运行. 运行软件为 Matlab 7.14 (R2012a).

4.1 测量矩阵构造

为了得到 Kronecker 合成矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$, 首先需要产生 Grassmann 矩阵 $G \in \mathbb{R}^{\frac{M}{d} \times m}$. 为此, 采用 Tropp 等提出的交替投影法^[29] 对 Gauss 随机矩阵做优化处理.

图 1 给出了不同分块尺度下, Gauss 随机矩阵优化前后的相干性对比, 其中 $p_i (i \in [m])$ 表示矩阵的第 i 列. 不难发现, 对 Gauss 随机矩阵优化后所得的 Grassmann 矩阵, 其相干系数非常接近 Welch 下界.

接下来, 取正交矩阵 $D = H/\sqrt{d}$, 构造测量矩阵 $\Phi = G \otimes D$. 此处 $H \in \mathbb{R}^{d \times d}$ 为 Hadamard 矩阵. 相应结果如图 2 所示. 由图可知, 所获 Kronecker 合成矩阵的块相干系数非常接近 Block-Welch 下界. 鉴于此, 在后续数值实验中, 将所获 Kronecker 合成矩阵选作测量矩阵.

4.2 算法对比

为了求解 $l_2/l_q (0 < q \leq 1)$ 问题, 首先将其转化为下述光滑、无约束的形式:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{x}\|_{2,q}^{\epsilon,q} + \frac{1}{2\lambda} \|\Phi \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2,$$

其中 λ 是正则化参数, ϵ 为充分小的光滑参数, 并且有 $\|\mathbf{x}\|_{2,q}^{\epsilon,q} = \sum_{i=1}^m (\epsilon^2 + \|\mathbf{x}[i]\|_2^2)^{\frac{q}{2}}$. 在文献 [19] 中, Wang 等指出, 可以借助传统迭代重赋权最小二乘方法, 通过如下的迭代方式来寻找其最优解

$$\left(\Phi^T \Phi + \text{Diag} \left[\frac{q\lambda I_d}{(\epsilon_k^2 + \|\mathbf{x}^{(k)}[i]\|_2^2)^{1-\frac{q}{2}}} \right]_{1 \leq i \leq m} \right) \mathbf{x}^{(k+1)} = \Phi^T \mathbf{b},$$

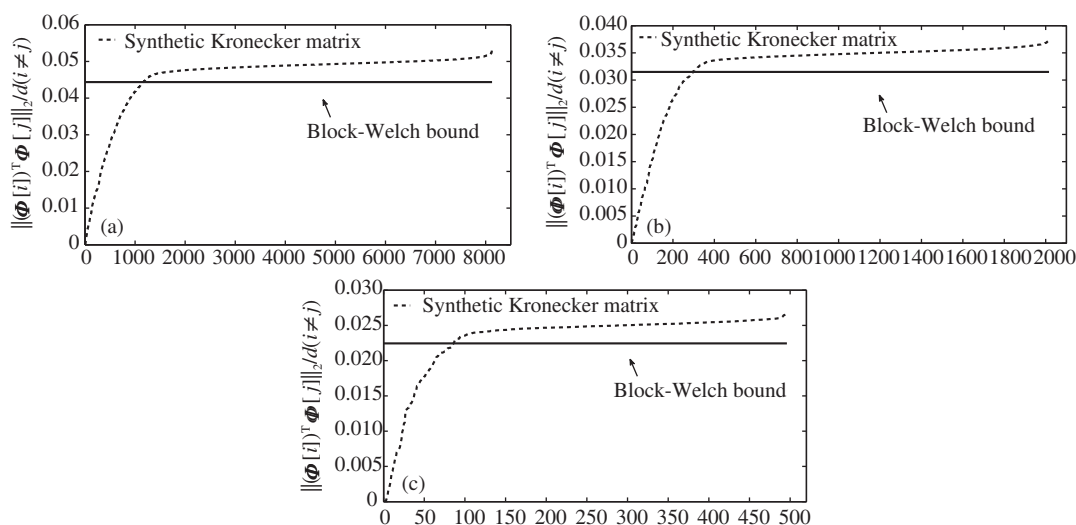


图 2 Kronecker 合成矩阵 $(\frac{1}{d}\|\Phi[i]^T\Phi[j]\|_2(i \neq j))$ 的数值按升序排列

Figure 2 Synthetic Kronecker matrix (the value of $\frac{1}{d}\|\Phi[i]^T\Phi[j]\|_2(i \neq j)$ was sorted in ascending order). (a) $d = 2$; (b) $d = 4$; (c) $d = 8$

其中 Diag 表示对角矩阵. 具体地, 有

- 步骤 1 初始化参量 $\lambda, q, s_0, \mathbf{x}^{(0)}, \epsilon_0, \alpha$.
- 步骤 2 开始迭代, 令 $k = 0$.
- 步骤 3 通过 $\mathbf{x}^{(k)}$ 解决下面的线型问题:

$$\left(\Phi^T \Phi + \text{Diag} \left[\frac{q\lambda I_d}{(\epsilon_k^2 + \|\mathbf{x}^{(k)}[i]\|_2^2)^{1-\frac{q}{2}}} \right]_{1 \leq i \leq m} \right) \mathbf{x}^{(k+1)} = \Phi^T \mathbf{b}.$$

- 步骤 4 当 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 满足停机条件, 将其作为输出, 同时结束迭代, 否则执行下一步骤.

步骤 5 更新 $\epsilon_{k+1} = \min \{\epsilon_k, \alpha \cdot r(\mathbf{x}^{(k+1)})_{s_0}\}$. 其中 s_0 表示待重构信号的预测块稀疏度, 而 $r(\mathbf{x})_t$ 则表示向量 \mathbf{x} 分块的第 t 个 ℓ_2 范数最大值.

- 步骤 6 用 $k + 1$ 替换 k , 并返回到步骤 3.

本文统一取 $s_0 = M/d$, $\mathbf{x}^{(0)}$ 为零向量, 并设定停机条件为 $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_2 \leq 1 \times 10^{-4}$ 或者 $k \geq 1000$. 若重构信号 \mathbf{x}_r 和原始信号 \mathbf{x}^* 的相对误差满足: $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_r\|_2 / \|\mathbf{x}^*\|_2 \leq 1 \times 10^{-3}$, 那么就认为信号重构成功. 为了克服实验结果的偶然性, 所有实验将独立重复地进行 100 次, 并以相应的平均值作为最终统计结果.

目前关于参数 ϵ_0, α 和 λ 的选择, 尚无确定性方法. 根据以往经验, 取 $\epsilon_0 = 1, \alpha = 0.9$. 在此基础上, 考虑通过对块稀疏信号的精确重构来筛选合适的正则化参数 λ . 不失一般性, 设定测试信号的分块尺度 $d = 4$, 并取块稀疏度 $s = 15$ 的信号作测试信号, 具体实验结果如图 3 所示. 由图可知, 取 $\lambda = 1 \times 10^{-4}$ 是比较合适的.

在接下来的实验中, 将测试 ℓ_2/ℓ_q ($0 < q \leq 1$) 算法对块结构信号的重构表现. 首先考虑对块稀疏信号的精确重构. 其中块稀疏信号的非零块位置随机产生, 其数值服从正态分布. 图 4(a)~(c) 给出了不同分块尺度下 ℓ_2/ℓ_q ($0 < q \leq 1$) 方法对块稀疏信号的重构结果. 由图可以看出, 针对不同的 $q, \ell_2/\ell_q$

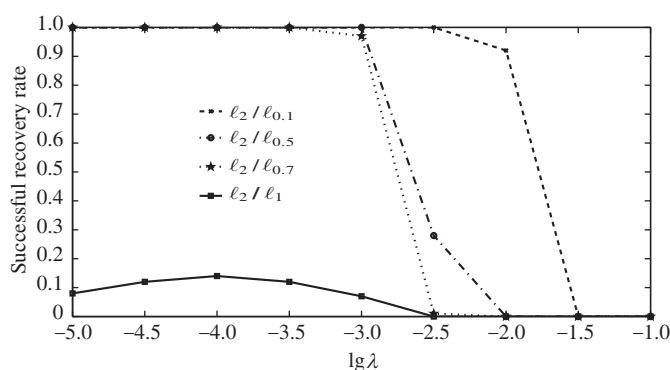


图 3 正则化参数 λ 的选择

Figure 3 Selection of regularization parameter λ

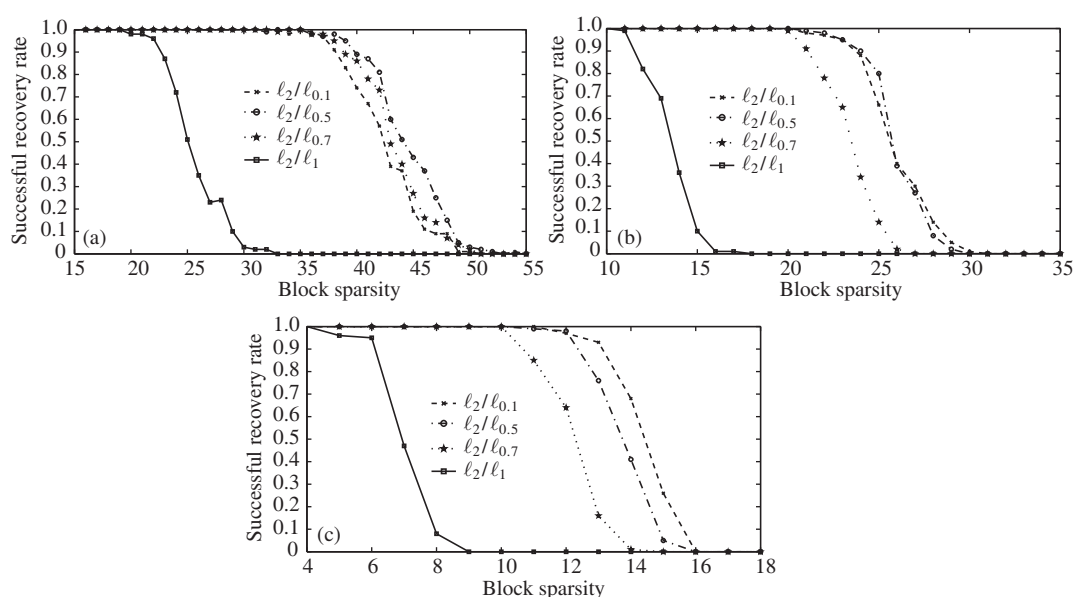


图 4 块稀疏信号的精确重构

Figure 4 Exactly recovery of block-sparse signals. (a) $d = 2$; (b) $d = 4$; (c) $d = 8$

方法的重构效果不尽相同: 一个较小的 q ($0 < q \ll 1$) 往往能产生更加好的重构效果; 随着 q 的增加, 其重构效果有减弱的趋势; 随着分块尺度的增大, l_2/l_q ($0 < q < 1$) 方法间的差距愈加突出, 但皆明显优于 l_2/l_1 方法. 在一定程度上印证了非凸 l_2/l_q ($0 < q < 1$) 方法对块稀疏信号重构的有效性.

接下来, 考虑对近似块稀疏信号^[20]的鲁棒重构. 所谓近似块稀疏信号, 指的是信号不同分块的 l_2 范数值以幂式 $i^{-\alpha}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$) 衰减. 不失一般性, 取 $\alpha = 1$, 而噪声信号 ξ 则由 Matlab 命令 $\epsilon \cdot \text{randn}(M, 1)$ 生成, 其中 ϵ 表示噪声水平.

图 5 给出了不同 q 和噪声水平 ϵ 下, 信号重构的信噪比 (SNR) 结果. 可以看出, 随着噪声水平的上升, l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) 方法的重构性能在逐步下降. 而随着分块尺度 d 的增大, 其重构性能却在稳步

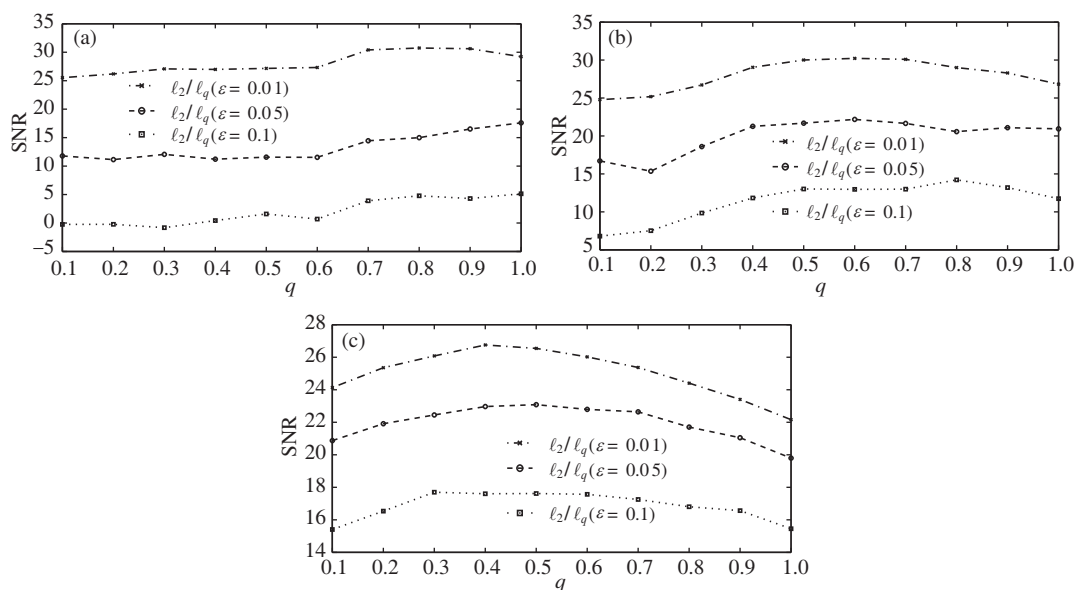


图 5 近似块稀疏信号的鲁棒重构

Figure 5 Robust recovery of nearly block-sparse signals. (a) $d = 2$; (b) $d = 4$; (c) $d = 8$

上升. 特别是, 当 $d = 8$ 时, 相较 l_2/l_1 方法, l_2/l_q ($0 < q < 1$) 方法的优势非常明显. 在一定程度上反映了非凸 l_2/l_q ($0 < q < 1$) 方法对一般块结构信号重构的鲁棒性.

5 结论

有关非凸压缩感知的理论研究, 近年来受到了广泛关注. 但已有研究基本上都是基于 RIP 理论的. 而 RIP 理论的验证涉及 NP 难问题的求解, 这就使得 RIP 理论下的条件或结论缺乏现实的可行性. 本文充分利用块相干系数计算上的优势, 结合非凸压缩感知重构理论, 研究了 l_2/l_q ($0 < q \leq 1$) 问题精确和鲁棒重构的充分条件, 并对其鲁棒重构误差估计给出了严格的数学刻画. 此外, 数值实验部分对理论结果有效性进行了验证、支撑. 所获结果为基于 RIP 理论的非凸块稀疏压缩感知方法提供了理论上的补充, 对压缩感知理论的进一步研究具有一定的理论意义和参考价值.

参考文献

- 1 Donoho D L. Compressed sensing. IEEE Trans Inform Theory, 2006, 52: 1289–1306
- 2 Candès E J, Romberg J K, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. IEEE Trans Inform Theory, 2006, 52: 489–509
- 3 Xu Z Q. Compressed sensing: a survey. Sci Sin Math, 2012, 42: 865–877 [许志强. 压缩感知. 中国科学: 数学, 2012, 42: 865–877]
- 4 Lustig M, Donoho D L, Pauly J M. Sparse MRI: the application of compressed sensing for rapid MR imaging. Magn Reson Med, 2007, 58: 1182–1195
- 5 Wright J, Yang A Y, Ganesh A, et al. Robust face recognition via sparse representation. IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell, 2009, 31: 210–227

- 6 Majumdar A, Ward R. Compressed sensing of color images. *Signal Process*, 2010, 90: 3122–3127
- 7 Candès E J, Tao T. Decoding by linear programming. *IEEE Trans Inform Theory*, 2005, 51: 4203–4215
- 8 Candès E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *C R Math*, 2008, 346: 589–592
- 9 Foucart S. A note on guaranteed sparse recovery via ℓ_1 -minimization. *Appl Comput Harmon Anal*, 2010, 29: 97–103
- 10 Mo Q, Li S. New bounds on the restricted isometry constant δ_{2k} . *Appl Comput Harmon Anal*, 2011, 31: 460–468
- 11 Cai T, Zhang A. Sparse representation of a polytope and recovery of sparse signals and low-rank matrices. *IEEE Trans Inform Theory*, 2014, 60: 122–132
- 12 Cotter S F, Rao B D. Sparse channel estimation via matching pursuit with application to equalization. *IEEE Trans Commun*, 2002, 50: 374–377
- 13 Malioutov D, Cetin M, Willsky A. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays. *IEEE Trans Signal Process*, 2005, 53: 3010–3022
- 14 Eldar Y C, Mishali M. Robust recovery of signals from a structured union of subspaces. *IEEE Trans Inform Theory*, 2009, 55: 5302–5316
- 15 Chartrand R. Exact reconstruction of sparse signals via nonconvex minimization. *IEEE Signal Process Lett*, 2007, 14: 707–710
- 16 Foucart S, Lai M J. Sparsest solutions of underdetermined linear systems via ℓ_q minimization for $0 < q \leq 1$. *Appl Comput Harmon Anal*, 2009, 26: 395–407
- 17 Zhang H, Wang Y, Chang X Y, et al. $L_{1/2}$ regularization. *Sci China Inf Sci*, 2010, 40: 412–422 [张海, 王尧, 常象宇, 等. $L_{1/2}$ 正则化. *中国科学: 信息科学*, 2010, 40: 412–422]
- 18 Xu Z B, Guo H L, Wang Y, et al. Representative of $L_{1/2}$ regularization among $L_q(0 < q \leq 1)$ regularizations: an experimental study based on phase diagram. *Acta Automatica Sin*, 2012, 38: 1225–1228
- 19 Wang Y, Wang J J, Xu Z B. On recovery of block-sparse signals via mixed $\ell_2/\ell_q(0 < q \leq 1)$ norm minimization. *EURASIP J Adv Signal Process*, 2013, 2013: 1–17
- 20 Wang Y, Wang J J, Xu Z B. Restricted p -isometry properties of nonconvex block-sparse compressed sensing. *Signal Process*, 2014, 104: 188–196
- 21 Donoho D L, Huo X. Uncertainty principles and ideal atomic decomposition. *IEEE Trans Inform Theory*, 2001, 47: 2845–2862
- 22 Gribonval R, Nielsen M. Sparse representations in unions of bases. *IEEE Trans Inform Theory*, 2003, 49: 3320–3325
- 23 Cai T, Wang L, Xu G W. Stable recovery of sparse signals and an oracle inequality. *IEEE Trans Inform Theory*, 2010, 56: 3516–3522
- 24 Eldar Y C, Kuppinger P, Bölcskei H. Block-sparse signals: uncertainty relations and efficient recovery. *IEEE Trans Signal Process*, 2010, 58: 3042–3054
- 25 Calderbank R, Thompson A, Xie Y. On block coherence of frames. *Appl Comput Harmon Anal*, 2015, 38: 50–71
- 26 Tropp J A. Greed is good: algorithmic results for sparse approximation. *IEEE Trans Inform Theory*, 2004, 50: 2231–2242
- 27 Foucart S, Rauhut H. A mathematical introduction to compressive sensing. Berlin: Springer, 2013: 111–131
- 28 Welch L R. Lower bounds on the maximum cross-correlation of signals. *IEEE Trans Inform Theory*, 1974, 20: 397–399
- 29 Tropp J A, Dhillon I S, Heath Jr R W, et al. Designing structured tight frames via an alternating projection method. *IEEE Trans Inform Theory*, 2005, 51: 188–209
- 30 Elad M. Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing. New York: Springer, 2010. 17–33
- 31 Xu Z Q. Deterministic sampling of sparse trigonometric polynomials. *J Complex*, 2011, 27: 133–140

A coherence theory of nonconvex block-sparse compressed sensing

Wendong WANG¹, Jianjun WANG^{2*}, Yao WANG³ & Zili ZHANG^{1,4}

¹ School of Computer and Information Science, Southwest University, Chongqing 400715, China;

² School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China;

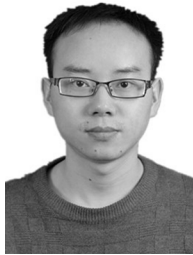
³ School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

⁴ School of Information Technology, Deakin University, VIC 3217, Australia

*E-mail: wjj@swu.edu.cn

Abstract The restricted isometry property plays an important role in the theoretical study of compressed sensing. However, the verification of any given restricted isometry conditions is a complex combinatorial optimization problem. To remedy this issue, in this article, we propose a coherence theory of nonconvex block-sparse compressed sensing and obtain two types of sufficient conditions for block-structured signal recovery. The obtained results extend the coherence theory used in the traditional convex sparse recovery case to the nonconvex block-sparse recovery case. With constructing a sort of measurement matrices whose block coherence were proved to be very small, we demonstrate the effectiveness of the strategy for nonconvex block-sparse compressed sensing via a series of simulation studies.

Keywords block sparsity, compressed sensing, RIP, block coherence, nonconvex minimization method



Wendong WANG was born in 1989. Currently, he is a Ph.D. student at the School of Computer and Information Science, Southwest University, Chongqing, China. His research interests include compressed sensing, machine learning, and data mining.



Jianjun WANG was born in 1976. He received the Ph.D. degree in applied mathematics from Xi'an Jiaotong University, Xi'an, China in 2006. Currently, he is a professor at the School of Mathematics and Statistics in Southwest University, Chongqing, China. His current research interests include intelligent information processing, massive data analysis, and approximation theory.



Yao WANG was born in 1983. He received the Ph.D. degree in applied mathematics from Xi'an Jiaotong University, China, in 2014. Currently, he is an assistant professor at the Department of Statistics in Xi'an Jiaotong University, China. His current research interests include statistical signal processing, high-dimensional statistical inference, and computational biology.



Zili ZHANG is a professor at Southwest University, Chongqing, China. He received his B.S. degree from Sichuan University, MEng from Harbin Institute of Technology, and Ph.D. degree from Deakin University, all in computing. He serves as program committee chair, general chair, or program committee member in many international conferences. His research interests include bio-inspired artificial intelligence, agent-based computing, big data analysis, and agent-data mining interaction and integration.