中国科学: 信息科学 2016 年 第 46 卷 第 5 期: 610–626
SCIENTIA SINICA Informationis
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论 文

基于矩阵运算的复杂网络构建方法

刘胜久[①②], 李天瑞[①②*], 洪西进[①②③], 王红军[①②], 珠杰[①②④]

① 西南交通大学信息科学与技术学院, 成都 611756
② 四川省云计算与智能技术高校重点实验室, 成都 611756
③ 台湾科技大学资讯工程系, 台北 10607
④ 西藏大学计算机系, 拉萨 850000
* 通信作者. E-mail: trli@swjtu.edu.cn

收稿日期: 2015–05–07; 接受日期: 2015–07–02
国家自然科学基金 (批准号: 61175047, 61262058, 61152001) 和中国科学院自动化研究所复杂系统管理与控制重点实验室开放课题 (编号: 20110102) 资助项目

摘要 本文从邻接矩阵的视角分析复杂网络, 研究了基于矩阵 Kronecker 积运算与 Kronecker 和运算的复杂网络构建方法. 将 Kronecker 积运算迭代地应用于一个简单初始网络的邻接矩阵, 得到了一个 Kronecker 积图, 也是一个分形维数不超过 2 的自相似网络. 当初始网络是连通非二分图时, 则得到的 Kronecker 积图同时具有小世界特性, 其直径不超过初始网络直径的两倍. 其次, 将 Kronecker 和运算顺次应用于多个简单初始网络的邻接矩阵, 得到了一个 Kronecker 和图, 也是一个度分布呈正态分布的随机网络. 最后, 给出了基于矩阵运算的复杂网络构建方法的若干性质.

关键词 复杂网络 矩阵运算 自相似网络 分形维数 随机网络

1 引言

复杂网络是复杂系统的高度抽象, 一直受到人们的关注. 对复杂网络的系统性研究可溯源到 20 世纪中叶 Erdos 和 Renyi [1] 提出的 ER 随机网络模型, 在后续近半个世纪的时间内一些重要的网络模型包括 WS 小世界网络模型 [2]、NW 小世界网络模型 [3]、BA 无标度网络模型 [4] 等相继提出.

WS, NW, BA 网络模型是 ER 网络模型的改进与拓展, 它们均是通过对节点连接策略的调整以构建出不同类型的网络, 由此得到的网络度分布也不尽相同. ER 网络模型度分布呈泊松分布, WS 与 NW 网络模型的度分布呈指数分布, 而 BA 网络模型度分布呈幂律分布. WS 和 NW 网络模型揭示了复杂网络的小世界特性, 而 BA 网络模型则揭示了复杂网络的无标度性质. 小世界特性及无标度特性被誉为复杂网络的两大特性, 它们的提出开辟了复杂网络研究的新纪元, 掀起了复杂网络研究的另一股热潮.

复杂网络的小世界特性及无标度特性在真实网络中广泛存在, 对小世界网络及无标度网络的研究也成为复杂网络研究的重点, 人们先后提出了小世界网络及无标度网络的各种改进模型 [5,6]. 近年来,

引用格式: 刘胜久, 李天瑞, 洪西进, 等. 基于矩阵运算的复杂网络构建方法. 中国科学: 信息科学, 2016, 46: 610–626, doi: 10.1360/N112014-00396

© 2016《中国科学》杂志社

复杂网络的自相似特性引起了人们极大的关注[7], 其被誉为继小世界特性和无标度特性后的复杂网络第 3 大特性. 但相对于前两者的研究, 对自相似特性的研究尚不深入, 目前尚未有公认的自相似网络模型问世.

在对复杂网络的研究中, 对经典网络模型的持续改进是复杂网络研究的一个重点. 吴晓平等[8] 引入一种负载容量非线性模型来研究小世界网络的级联抗毁性, 发现小世界网络的级联抗毁性随权重系数的增大而减弱. 任小叶等[9] 提出基于表征异质投资群体结构的无标度网络自组织金融模型, 模型生成的价格波动序列与实际股指具有相似的演化动力学. Rudolph 等[10] 针对有向 WS 小世界网络模型进行研究, 给出了一种新的分析框架及表述其邻接矩阵的代数表达式, 可精确描述 WS 小世界网络的非对称性指数及聚集系数. Galiceanu 等[11] 研究了具有无标度网络特性的聚合物, 并分析了刚度参数和网络规模对其动力特性的影响. 在新型网络模型的构建方面, 王潮等[12] 提出了一种具有小世界特性的无线传感器网络簇级拓扑算法, 对随机攻击具有很强的鲁棒性, 并具有很好的生存性能. 刘洲洲等[13] 通过对节点生命期建模, 得出了一种能耗均衡的无线传感器网络加权无标度拓扑模型, 均衡了节点能耗. Peng 等[14] 提出了一个多维增长的确定性小世界网络模型, 并给出了计算该网络模型特征路径长度的精确解析表达式. Emmerich 等[15] 对嵌入式无标度网络的结构和功能特性进行研究, 并对比分析了嵌入式无标度网络与非嵌入式无标度网络的异同. 此外, 由于复杂网络的邻接矩阵全面地刻画了网络中节点之间的相互关系, 通过它能够很好地描述复杂系统的特质. 熊文海等[16] 推导了网络邻接矩阵与网络各特质之间的函数关系, 并找出了网络邻接矩阵与网络结构的一一对应关系. Jalan 等[17] 使用随机矩阵理论对复杂网络进行分析, 通过最近邻及次最近邻分布分析了随机网络、无标度网络和小世界网络邻接矩阵的特征值, 发现这些分布属于 Gauss 正交系统. 对矩阵运算在复杂网络分析中的应用尚需进一步深入研究.

在分形理论的理论研究方面, 吴亚豪等[18] 定义了具有量纲函数的重分形测度, 并证明了当欧氏空间中两个重分形测度具有等价的量纲函数时二者等价. 王宏勇等[19] 构造了一类新的分形插值曲面, 可用作任意数据点上的自仿射和非自仿射的分形插值模型, 导出了能刻画这类分形曲面敏感性的一些不等式. Seo 等[20] 针对环境敏感 L 系统单位体积增长的局限, 通过引入主分支规则及区域增长变量对 L 系统进行多层次多模式扩展, 而且调整系统的参数能够改变系统叶子的形状. Breckner 等[21] 指出在欧氏空间开集中定义的非线性椭圆问题可以通过分形理论得到解决, 证明了基于 Sierpinski gasket 定义的某些渐变系统 3 个非零弱解的存在性. 在分形理论的应用研究方面, 周洁等[22] 研究了周期受击陀螺系统波函数的分形, 发现在打击强度系数较弱时相空间规则且分形维接近于 1, 在打击强度系数增大时相空间出现混沌且分形维随之增大. 王智文等[23] 提出了一种基于多元统计模型的分形小波自适应图像去噪算法, 在去除噪声的同时能有效地保持图像的边缘特征并保留图像的精细结构. Xiu 等[24] 将重标极差分析用于风速系列分形特性的分析中, 以提高风速系列的预测效果, 并对 Hurst 指数接近 1 的风速系列给出了改进的分形插值预测方法. Rahimi[25] 应用传递矩阵法在理论上分析了电磁波通过有损且分散的单负材料组成的一维自相似分形结构后的透射光谱, 发现缺陷的引入会降低传输峰值但不影响透射光谱的主要性能.

在自相似网络研究方面, Song 等[26] 给出了一个数学模型以揭示复杂网络分形结构的成因, 指出中心节点的非同源匹配是分形结构的重要成因, 并说明这种连接可以有效地提高网络的鲁棒性, 但他并没有给出反映分形结构最重要参数的分形维数或其他类似的参数. 张嗣瀛[27] 给出一个树状生长模型并指出生长过程及自相似结构的涌现可集中由简单的幂律体现, 幂律也是层层相似的自相似结构的成因. 而且, 这种模型的分形维数或相应的指数是系统功能的度量.

当前, 人们也在积极探寻引入新的研究工具与分析方法来研究复杂网络, 由于网络的邻接矩阵与

网络的结构呈一一对应关系, 本文拟从邻接矩阵的视角分析复杂网络, 主要是通过矩阵运算实现复杂网络的构建, 即通过一个简单初始网络邻接矩阵的迭代 Kronecker 积运算构建自相似网络, 并通过多个简单初始网络邻接矩阵的 Kronecker 和运算构建随机网络，同时给出了它们的若干性质.

2 预备知识

2.1 图论

设图 $G=(V, E)$ 是一个无向无环无权图, 其中 $V=v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots (1 \leqslant i \leqslant |V|)$ 是网络中所有节点的集合, $E=e_1, e_2, \ldots, e_j, \ldots (1 \leqslant j \leqslant |E|)$ 是网络中所有边的集合, 且有 $E \subseteq V \times V$. $|V|$ 表示图 G 中的节点数目, $|E|$ 表示图 G 中的边数目.

定义1 (度分布 [28]) 图 G 的节点度分布是指图 G 中节点度的概率分布或频率分布 (统称分布).

度分布是对一个图中节点度数的总体描述, 对于随机图而言, 其度分布指的是图中节点度数的概率分布. 对于任一非负整数 k 而言, 度数为 k 的节点在图 G 的所有节点中所占的比例 $p(k)$ 表述为 [29]

$$p(k) = \frac{\left|\bigcup_{d(v_i)=k} \{v_i\}\right|}{|V|}. \tag{1}$$

且有

$$\sum_{d \in N^0} p(k) = 1. \tag{2}$$

当然, 也可以用图 G 中节点度的频数来描述度分布, 此时 (1) 及 (2) 式表述为

$$p(k) = \left|\bigcup_{d(v_i)=k} \{v_i\}\right|, \tag{3}$$

$$\sum_{d \in N^0} p(k) = |V|. \tag{4}$$

在描述图 G 的度分布时, (1) 与 (3) 式及 (2) 与 (4) 式的效果是一样的.

Newman 等 [30] 提出用图 G 的节点度分布多项式来更直观地描述节点的度分布, 其中图的度分布多项式是以节点度的概率为系数, 以节点度为次数的单项式组成的多项式:

$$\mathrm{Poly}(G) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) x^k. \tag{5}$$

对 (5) 式有

$$\mathrm{Poly}(G)\,|_{x=1} = 1, \tag{6}$$

$$p(k) = \left.\frac{\mathrm{d}^k \mathrm{Poly}(G)}{k!}\right|_{x=0}. \tag{7}$$

类似地, 也可以用图 G 中节点度的频数来描述 (5) 式中节点度的概率, 此时 (6) 式表述为

$$\mathrm{Poly}(G)\,|_{x=1} = |V|. \tag{8}$$

且有

$$\mathrm{Poly}'(G)\mid_{x=1}=2\,|E|\,. \tag{9}$$

通过图的节点度分布多项式可以比较简单地得到图的节点度分布、节点数目及边数目.

定义2 (邻接矩阵 [28]) 图 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 是 $|V|\times|V|$ 的方阵, 其中, 若 v_i 与 v_j 相邻, 则有 $A(G)_{ij}$=1, 否则 $A(G)_{ij}$=0.

因此, 节点 v_i 的度 $d(v_i)$ 是指邻接矩阵 $A(G)$ 中第 i 行或第 i 列中非零元素的数目, 即

$$d(v_i)=\sum_{j=1}^{|V|}A_{ij}=\sum_{j=1}^{|V|}A_{ji}. \tag{10}$$

定义3 (图密度 [28]) 图的密度是指图 G 中的边数与最多可能的边数之比, 记为 Density(G).

2.2 分形理论

分形理论的数学基础是分形几何学, 由分形几何衍生出分形信息、分形设计、分形艺术等应用 [31], 其最基本特点是从分数维度的视角, 用数学方法描述和研究客观事物. 典型的分形图形包括 Cantor 集、Koch 雪花及 Menger 海绵等.

定义4 (分形矩阵 [32]) 分形矩阵是通过迭代相加生成的具有分形特性的一系列矩阵.

分形矩阵最早应用于图案生成中 [33]. 对矩阵 $A_{m\times n}$ 而言, 分别用矩阵 A 的每一个元素 a_{ij} ($1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$) 加上矩阵 A 的每一个元素所得的矩阵去置换元素 a_{ij}, 得到一个局部与整体相似的矩阵 $A^{(1)}_{m^2\times n^2}$, 其整体结构特性与生成矩阵 A 相同. 如果上述变换过程不断进行下去, 就会得到一系列自相似的矩阵: $A^{(1)}_{m^2\times n^2}$, $A^{(2)}_{m^3\times n^3}$, $A^{(3)}_{m^4\times n^4}$, ..., 其中 $A^{(i+1)}_{m^{i+2}\times n^{i+2}}$ 都是由 $A^{(i)}_{m^{i+1}\times n^{i+1}}$ 的每一个元素与 A 相加后置换而成. 通过上述迭代操作生成的一系列矩阵 $A^{(1)}_{m^2\times n^2}$, $A^{(2)}_{m^3\times n^3}$, $A^{(3)}_{m^4\times n^4}$, ... 称为分形矩阵.

3 基于矩阵运算的复杂网络模型构建

3.1 基于矩阵运算的自相似复杂网络模型构建

文献 [34] 指出, 迭代 Kronecker 积运算生成的矩阵也是分形矩阵. 由此, 有如下基于矩阵运算的自相似复杂网络模型构建方法: 对于一个简单图的邻接矩阵 $A_{m\times m}$, 分别用 A 的每一个元素 a_{ij} ($1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant m$) 乘以 A 的每一个元素所得的矩阵去置换元素 a_{ij}, 得到一个局部与整体相似的自相似矩阵, 令此变换过程不断进行下去, 得到一系列自相似矩阵 (对应于 A 的迭代 Kronecker 积运算), 这些自相似矩阵视为邻接矩阵, 其对应的网络就是 A 的迭代 Kronecker 积图, 也具有自相似特性, 即是自相似网络.

对图 G=(V, E) 及对应的邻接矩阵 A 而言, 经过一次 Kronecker 积运算可以得到新的图 $G^{(1)}$=($V^{(1)}$, $E^{(1)}$) 及对应的邻接矩阵 $A^{(1)}$. 由于图的邻接矩阵的行数或列数代表图的节点数目, 则有 $\left|V^{(1)}\right|=|V|\times|V|=|V|^2$, $\left|E^{(1)}\right|=2\,|E|\times|E|=2\,|E|^2$. 依此类推, 可以得到

$$\left|V^{(i)}\right|=|V|^{i+1}=(\mathrm{Poly}(G)\mid_{x=1})^{i+1}\,, \tag{11}$$

$$\left|E^{(i)}\right|=2^i\,|E|^{i+1}=\left(\frac{1}{2}\mathrm{Poly}'(G)\mid_{x=1}\right)^{i+1}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Density}(G^{(i)}) &= \frac{2\left|E^{(i)}\right|}{\left|V^{(i)}\right|\left(\left|V^{(i)}\right|-1\right)} = \frac{(2\left|E\right|)^{i+1}}{\left|V\right|^{i+1}\left(\left|V\right|^{i+1}-1\right)} \\ &= \frac{\left(\mathrm{Poly}'(G)\mid_{x=1}\right)^{i+1}}{\left(\mathrm{Poly}(G)\mid_{x=1}\right)^{i+1}\left(\left(\mathrm{Poly}(G)\mid_{x=1}\right)^{i+1}-1\right)}.\end{aligned} \tag{13}$$

$\mathrm{G}^{(i)}$ 可简记为如下形式:

$$G^{(i)} = \overset{(i)}{\bigotimes} G. \tag{14}$$

分别对 (11)~(13) 式进行分析, 随着迭代次数 i 的增大, 在 $i \to \infty$ 时, 所得到的复杂网络节点数、边数及网络密度分别为

$$\lim_{i\to\infty}\left|V^{(i)}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|V\right|^{i+1} \to \infty, \tag{15}$$

$$\lim_{i\to\infty}\left|E^{(i)}\right| = 2^i \lim_{i\to\infty}\left|E\right|^{i+1} \to \infty, \tag{16}$$

$$\lim_{i\to\infty}\mathrm{Density}\left(G^{(i)}\right) = \lim_{i\to\infty}\frac{2\left|E^{(i)}\right|}{\left|V^{(i)}\right|\left(\left|V^{(i)}\right|-1\right)} = \lim_{i\to\infty}\left(\frac{2\left|E\right|}{\left|V\right|^2}\right)^{i+1} \to 0. \tag{17}$$

(15)~(17) 式说明一个图的迭代 Kronecker 积图在迭代次数趋近于无穷时, 其节点数及边数趋近于无穷, 而网络密度趋近于 0.

图的度分布多项式将节点的度处理为单项式的次数. 既可以用度分布多项式表述初始图的度分布, 也可以用度分布多项式表述图的迭代 Kronecker 积图的度分布. 直接对初始图度分布多项式进行计算, 得到图的迭代 Kronecker 积图的度分布多项式, 进而得到其度分布, 于是有如下定理.

定理1 一个图的迭代 Kronecker 积图的度分布可以通过度分布多项式的系数相乘次数相乘的运算得到.

证明 由于 Kronecker 积运算是一个矩阵的每一行与另一个矩阵的每一行分别相乘, 得到的结果矩阵每一行中非零元素的数目就是节点对应的节点度. 若将矩阵每一行中非零元素的数目视为单项式的次数, 在采用图的度分布多项式表述处理图的度分布时, 邻接矩阵行与行相乘反映到度分布多项式中就是次数与次数相乘, 也即新得到的 Kronecker 积图的度分布多项式可视为初始图度分布多项式系数相乘次数相乘的特殊乘积运算. 定理 1 得证.

根据定理 1, 对图 $G^{(1)}$ 而言, 若 $\mathrm{Poly}\,(G) = \sum_{i=1}^{|V|} x^{d(v_i)}$, 则有

$$\mathrm{Poly}\left(G^{(1)}\right) = \mathrm{Poly}\,(G)\bigotimes\mathrm{Poly}\,(G) = \sum_{i=1}^{|V|} x^{d(v_i)}\bigotimes\sum_{j=1}^{|V|} x^{d(v_j)} = \sum_{i=1}^{|V|}\sum_{j=1}^{|V|} x^{d(v_i)\times d(v_j)}. \tag{18}$$

这样, 在自相似 Kronecker 积图构建中, 可以采用 (18) 式, 从理论上严格得到新生成的自相似网络度分布多项式, 进而得到其度分布. 定理 1 还可以推广并应用于不同图的 Kronecker 积图.

在分形理论中, 分析并判定一个图形属于分形图形的要点是给出此分形图形的分形维数. 由于邻接矩阵与图是一一对应的 [16], 对自相似的图及其邻接矩阵而言, 二者的分形维数是相等的, 可以通过对图的邻接矩阵分形维数的分析间接得到图的分形维数. 下面, 通过分形维数的定理, 给出此类自相似网络的分形维数.

对于 $m \times n$ 的矩阵 $A_{m\times n}$ 而言, 基于此矩阵得到规模是其 k 倍的 $(mk)\times(nk)$ 矩阵需要 k^2 个矩阵 $A_{m\times n}$ 进行简单的拼接. 对于 "拼接" 这种操作 ("运算") 而言, 其分形维数为

$$\mathrm{FD}=\frac{\log k^2}{\log k}=\frac{2\log k}{\log k}=2. \tag{19}$$

于是, 应用分形维数的计算方法, 可以得到如下结论.

定理2 一个图的迭代 Kronecker 积图的分形维数为其边数两倍的对数值与节点数对数值的比值, 即为

$$\mathrm{FD}\,(G)=\frac{\log 2\,|E|}{\log|V|}. \tag{20}$$

证明 在采用 Kronecker 积运算处理图 G=(V, E) 的邻接矩阵 $A_{|V|\times|V|}$ 时, $G^{(1)}$ 对应的邻接矩阵为 $A^{(1)}_{|V|^2\times|V|^2}$, 其规模是 $A_{|V|\times|V|}$ 的 $|V|$ 倍, 但只有在 $A(i,j)$=1 时才需要用 $A_{|V|\times|V|}$ 替换 $A(i,j)$, 共需要 $2|E|$ 个 $A_{|V|\times|V|}$ 进行选择性的 "拼接". 定理 2 得证.

定理3 一个图的迭代 Kronecker 积图的分形维数不超过 2.

证明 对于图 G=(V, E) 而言, 即有 $|E|\leqslant\frac{1}{2}|V|\,(|V|-1)$, 根据 (20) 式, 则有

$$\mathrm{FD}\,(G)=\frac{\log 2\,|E|}{\log|V|}\leqslant\frac{\log|V|\,(|V|-1)}{\log|V|}<2. \tag{21}$$

定理 3 得证.

一般情况下, 只关心连通图且非二分图. 于是, 基于定理 3 可以得出如下的引理.

引理1 一个连通图且非二分图的迭代 Kronecker 图的分形维数介于 1 到 2 之间.

证明 对于连通图且非二分图 G=(V, E) 而言, 有 $|E|\geqslant|V|>2$, 根据 (20) 式, 则有

$$\mathrm{FD}\,(G)=\frac{\log 2\,|E|}{\log|V|}\geqslant\frac{\log 2\,(|V|-1)}{\log|V|}>1. \tag{22}$$

结合 (21) 式, 即有 $1<\mathrm{FD}<2$. 引理 1 得证.

此外, 基于一个矩阵的迭代 Kronecker 积运算得到的矩阵也是分块矩阵, 对基于图的邻接矩阵的迭代 Kronecker 积运算得到的分块矩阵进行分析, 则有如下结论.

定理4 一个连通图且非二分图的迭代 Kronecker 积图的直径不超过初始图直径的两倍.

证明 设图 G=(V, E) 的直径为 d, 则通过其任一节点均可在不超过 d 步内到达另一节点. 在经过一次 Kronecker 积运算得到的 $G^{(1)}$ 中, 其对应的邻接矩阵 $A(G^{(1)})$ 中分块矩阵内部对应的每一个节点也可在不超过 d 步内到达此分块矩阵内部对应的另一节点, 一个分块矩阵与另一个分块矩阵之间也可在不超过 d 步内到达另一个分块矩阵, 也即 $G^{(1)}$ 的直径不超过 $2d$. 由于应用 Kronecker 积运算得到的图 $G^{(i)}(i\geqslant 1)$ 对应的邻接矩阵均是分块矩阵, 则上述分析对任意的 $i(i\geqslant 1)$ 均成立, 即基于一个图的邻接矩阵的迭代 Kronecker 积运算得到的分块矩阵对应的 Kronecker 积图的直径均不超过 $2d$. 定理 4 得证.

注 1 定理 4 表明一个连通图且非二分图的迭代 Kronecker 积图的直径均相等, 于是在具体的计算中只需要计算出 $G^{(1)}$ 的直径就可以得到所有此类自相似复杂网络的直径.

注 2 定理 4 只对连通图且非二分图成立, 对非连通图或二分图不成立, 因为二分图的迭代 Kronecker 积图是非连通图, 而非连通图的直径是无穷大.

进一步, 可以得出如下的定理.

表 1　自相似复杂网络与 Koch 雪花对比表

Table 1　Comparison between self-similarity network and Koch snowflake

Dimension	Koch snowflake	Self-similarity network
1	$\lim_{n\to\infty} T_n \to 0$ $\lim_{n\to\infty} L_n \to \infty$ $\lim_{n\to\infty} N_n \to \infty$	$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Density}(G^{(i)}) \to 0$ $\lim_{n\to\infty} \left\|V^{(i)}\right\| \to \infty$ $\lim_{n\to\infty} \left\|E^{(i)}\right\| \to \infty$
Fractal dimension	$\log_3 4$	$\log_{\|V\|} 2\,\|E\|$
2	$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{8}{5}S_0$	$\lim_{n\to\infty} D\left(G^{(i)}\right) \leqslant 2D(G)$

定理5　一个完全图且非二分图的迭代 Kronecker 积图的直径为 2.

证明　完全图中的每一个节点均与其他所有节点直接相连, 故其直径为 1. 根据定理 4, 完全图的迭代 Kronecker 积图直径不超过初始图直径的两倍, 即不超过 2. 只有完全图的直径才是 1, 而完全图的迭代 Kronecker 积图不是完全图, 故其直径只能是 2. 定理 5 得证.

注 3　与定理 4 类似, 定理 5 也只对连通图且非二分图成立.

为更直观地刻画自相似网络在不同维度下的度量情况, 将一个连通图且非二分图的迭代 Kronecker 积图对应的自相似网络与分形维数同样介于 1 到 2 之间的 Koch 雪花 [35] 进行对比, 先分析 Koch 雪花的性质.

作为典型的分形图形, Koch 雪花的主要特点是周长无限、面积有限, 其分形维数为 $\log_3 4$, 介于 1 到 2 之间 [36]. Koch 雪花是基于一个正三角形迭代生成的. 假设初始情况下正三角形的边长为单位长度 T_0=1, 其边数为 N_0=3, 其周长为 L_0=3T_0=3, 其面积为 $S_0=\frac{\sqrt{3}}{4}T^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$, T_n, N_n, L_n 和 S_n 分别表示第 n 步后得到的 Koch 雪花的边长、边数、周长和面积, 则有

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n T_0 = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n} \to 0, \\ \lim_{n\to\infty} N_n = \lim_{n\to\infty} 4^n N_0 = \lim_{n\to\infty} 3\times 4^n \to \infty, \\ \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n L_0 = \lim_{n\to\infty}\dfrac{4^n}{3^{n-1}} \to \infty, \\ \lim_{n\to\infty} S_n = 1+\dfrac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\dfrac{4}{9}\right)^i S_0 = \dfrac{8}{5}S_0 = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}. \end{cases} \tag{23}$$

采用上述方法生成的自相似网络与 Koch 雪花的对比如表 1 所示.

从表 1 可以看出, 在维度为 1 时, 自相似网络的密度与 Koch 雪花的边长均趋近于 0, 自相似网络的节点数及边数与 Koch 雪花的周长及边数均趋近于无穷; 在自身分形维数下, 二者皆可度量; 在维度为 2 时, 自相似网络的直径不超过初始图直径的 2 倍, Koch 雪花的面积也趋近于一个常数. 我们所构建的自相似网络与经典的自相似几何图形 Koch 雪花具有类似的特性, 即只有在自身分形维数下才可度量, 在低于自身分形维数时度量无穷, 在高于自身分形维数时度量有限.

根据定理 2, 自相似网络的分形维数只与初始图的节点数与边数有关, 可能存在多个拓扑结构不同的图却拥有相同的节点数及边数, 也可能存在多个拓扑结构不同且节点数与边数也不同但分形维数相同的图, 所以给出如下定义.

定义5 (准自相似网络)　准自相似 (quasi self-similarity) 网络是指由多个节点数及边数相等的初始网络对应的邻接矩阵通过 Kronecker 积运算而得到的 Kronecker 积图.

定义6 (泛自相似网络)　泛自相似 (pan self-similarity) 网络是指由多个边数 2 倍的对数值与节点

数对数值的比值相同的多个不同初始网络对应的邻接矩阵, 通过 Kronecker 积运算而得到的 Kronecker 积图.

对准自相似网络及泛自相似网络进行分析, 可以得到下述结论.

定理 6 准自相似网络的分形维数等于对应的自相似网络的分形维数.

证明 根据定理 2 及 (20) 式, 自相似网络的分形维数只与初始网络的节点数及边数有关. 又根据定理 1 及 (18) 式, 准自相似网络的节点数与对应的自相似网络的节点数相等, 而且准自相似网络的边数与自相似网络的边数相等. 所以, 准自相似网络的分形维数与对应的自相似网络的分形维数也相等. 定理 6 得证.

引理 2 泛自相似网络的分形维数等于对应的准自相似网络的分形维数.

证明 与定理 6 证明类似.

将复杂网络记为全集 U, 自相似网络记为 USS, 泛自相似网络记为 UPSS 及准自相似网络记为 UQSS, 则有如下定理.

定理 7 复杂网络 U 是 UPSS 的超集, UPSS 是 UQSS 的超集, UQSS 是 USS 的超集, 用公式表述为

$$\mathrm{USS} \subset \mathrm{UQSS} \subset \mathrm{UPSS} \subset \mathrm{U}. \tag{24}$$

证明 易证其成立.

3.2 基于矩阵运算的随机复杂网络模型构建

基于矩阵运算的随机复杂网络模型构建方法如下所示: 对于一系列随机选择的初始网络 $G_{(1)}$, $G_{(2)}, G_{(3)}, \ldots, G_{(i)}, \ldots$ 而言, 将 Kronecker 和运算顺次应用于上述网络对应的邻接矩阵可以得到一个新的矩阵, 该矩阵对应的网络是上述网络的 Kronecker 和图, 即为随机复杂网络.

对于随机选择的初始网络 $G=(V, E)$ 而言, 可以认为其度分布是随机的, 即度分布服从正态分布, 而节点的度在其度分布多项式 Poly 中即是对应的单项式次数, 故反映在 Poly 中, 则是其所有单项式的次数服从正态分布.

对两个图 $G_a=(V_a, E_a)$, $G_b=(V_b, E_b)$ 及对应的节点度分布多项式 $\mathrm{Poly}(G_a)$, $\mathrm{Poly}(G_b)$ 而言, 将 Kronecker 积运算应用于 G_a 与 G_b 对应的邻接矩阵所得到的 Kronecker 积图 G_{ab} 的节点度分布可以通过 $\mathrm{Poly}(G_a)$ 与 $\mathrm{Poly}(G_b)$ 的 Kronecker 积运算得到, 即有

$$\mathrm{Poly}(G_{ab}) = \mathrm{Poly}(G_a) \bigotimes \mathrm{Poly}(G_b) = \sum_{i=1}^{|V_a|} \sum_{j=1}^{|V_b|} x^{d(v_i)\times d(v_j)}. \tag{25}$$

图 G_{ab} 的节点度分布在其度分布多项式 $\mathrm{Poly}(G_{ab})$ 中也是其对应的单项式次数. 从上式可以看出, 两个相同或不同图的 Kronecker 积图的度分布可以视为初始网络度分布的非线性组合. 对于将 Kronecker 和运算应用于两个矩阵所得到的新矩阵可以视为一个矩阵的每一行加上另一个矩阵的每一行, 类似于 Kronecker 积运算对图的度分布多项式的处理, 将 Kronecker 和运算应用于 G_a 与 G_b 对应的邻接矩阵所得到的 Kronecker 和图 G'_{ab} 的节点度分布可以通过下式得到:

$$\mathrm{Poly}(G'_{ab}) = \mathrm{Poly}(G_a) \bigoplus \mathrm{Poly}(G_b) = \sum_{i=1}^{|V_a|} \sum_{j=1}^{|V_b|} x^{d(v_i)+d(v_j)}. \tag{26}$$

式 (26) 即是通常的多项式乘法, 可以看出, 类似于对 Kronecker 积采用系数相乘次数相乘的运算规则, 对 Kronecker 和采用系数相乘次数相加的运算规则也可以得到新网络的度分布. 对比于将两

个相同或不同图的 Kronecker 积图的度分布视为初始网络节点度分布的非线性组合, 可以将两个相同或不同图的 Kronecker 和图的度分布视为初始网络节点度分布的线性组合. 对于随机选择的初始网络而言, 其度分布服从正态分布, 由于有限个正态分布的线性组合也是正态分布, 基于多个初始网络的 Kronecker 和图的度分布也服从正态分布.

在初始网络集合G_1, G_2, $G_3, \ldots, G_i, \ldots$ 中, 对于顺次选择的 $G_{(1)}$, $G_{(2)}$, $G_{(3)}, \ldots, G_{(i)}, \ldots$, $G_{(n)}$ 并进行 Kronecker 和运算得到的 Kronecker 和图 $G^{(n)}$ 而言, 其节点数、边数、网络密度可以通过度分布多项式得到

$$\left|V^{(n)}\right| = \mathrm{Poly}(G^{(n)})\mid_{x=1} = \prod_{i=1}^{n}\left|V_{(i)}\right| = \prod_{i=1}^{n}\mathrm{Poly}(G_{(i)})\mid_{x=1}, \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\left|E^{(n)}\right| &= \frac{1}{2}\mathrm{Poly}'\left(G^{(n)}\right)\mid_{x=0} = \sum_{i=1}^{n}\left(\left|E_{(i)}\right|\prod_{j=1,\,j\neq i}^{j=n}\left|E_{(j)}\right|\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Poly}'\left(G_{(i)}\right)\mid_{x=1}\prod_{j=1,\,j\neq i}^{j=n}\mathrm{Poly}'\left(G_{(i)}\right)\mid_{x=1}\right),\end{aligned} \tag{28}$$

$$\mathrm{Density}\left(G^{(n)}\right) = \frac{2\left|E^{(n)}\right|}{\left|V^{(n)}\right|\left(\left|V^{(n)}\right|-1\right)} = \frac{\mathrm{Poly}'\left(G^{(n)}\right)\mid_{x=0}}{\mathrm{Poly}\left(G^{(n)}\right)\mid_{x=1}\left(\mathrm{Poly}\left(G^{(n)}\right)\mid_{x=1}-1\right)}. \tag{29}$$

$G^{(n)}$ 可简记为如下形式:

$$G^{(n)} = \bigoplus_{i=1}^{n} G_{(i)}. \tag{30}$$

3.3 不同组合的复杂网络模型

前面分析了基于一个简单初始图的迭代 Kronecker 积运算可以得到自相似网络, 基于多个简单初始图的 Kronecker 和运算可以得到随机网络. 其实也可以基于一个初始网络进行迭代 Kronecker 和运算或多个初始网络进行 Kronecker 积运算, 当然, 也可以同时应用 Kronecker 积运算及 Kronecker 和运算. 将上述复杂网络构建方法进行推广, 可以得到一般情况下基于矩阵运算的复杂网络构建方法. 基于一个, 有限多个, 乃至无穷多个初始图的 Kronecker 积运算和/或 Kronecker 和运算共有 9 种组合, 如表 2 所示, 9 种组合之间的关系如图 1 所示.

4 基于矩阵运算的复杂网络理论分析

4.1 基于矩阵运算的复杂网络数量分析

在基于矩阵运算的复杂网络构建中, 可以通过对初始图度分布多项式的计算而得到 Kronecker 积图及 Kronecker 和图的度分布多项式, 进而得到其度分布. 由于图的度分布多项式掩盖了图的拓扑结构, 一个相同的度分布多项式可能对应多个拓扑结构不同的图.

通过度分布多项式描述网络类似于化学中通过分子式描述化合物. 描述化合物需要分子式, 也需要结构式, 一个相同的分子式可能对应多个不同的结构式, 这突出的表现为化学中的同分异构现象, 而结构式即相当于网络的拓扑结构. 分子式之于结构式存在数量规律, 度分布多项式之于拓扑结构也存在数量规律. 对基于矩阵运算的复杂网络数量进行研究, 得到如下结论.

表 2 基于矩阵运算的 9 种组合复杂网络统计表

Table 2 Statistics of 9 combinations of complex network based on matrix operation

No.	Number	Matrix operation	Type of network
1		Kronecker product	Self-similarity network
2	1	Kronecker sum	–
3		Kronecker product, Kronecker sum	–
4		Kronecker product	–
5	n	Kronecker sum	Random network
6		Kronecker product, Kronecker sum	–
7		Kronecker product	Unclear
8	∞	Kronecker sum	Unclear
9		Kronecker product, Kronecker sum	Unclear

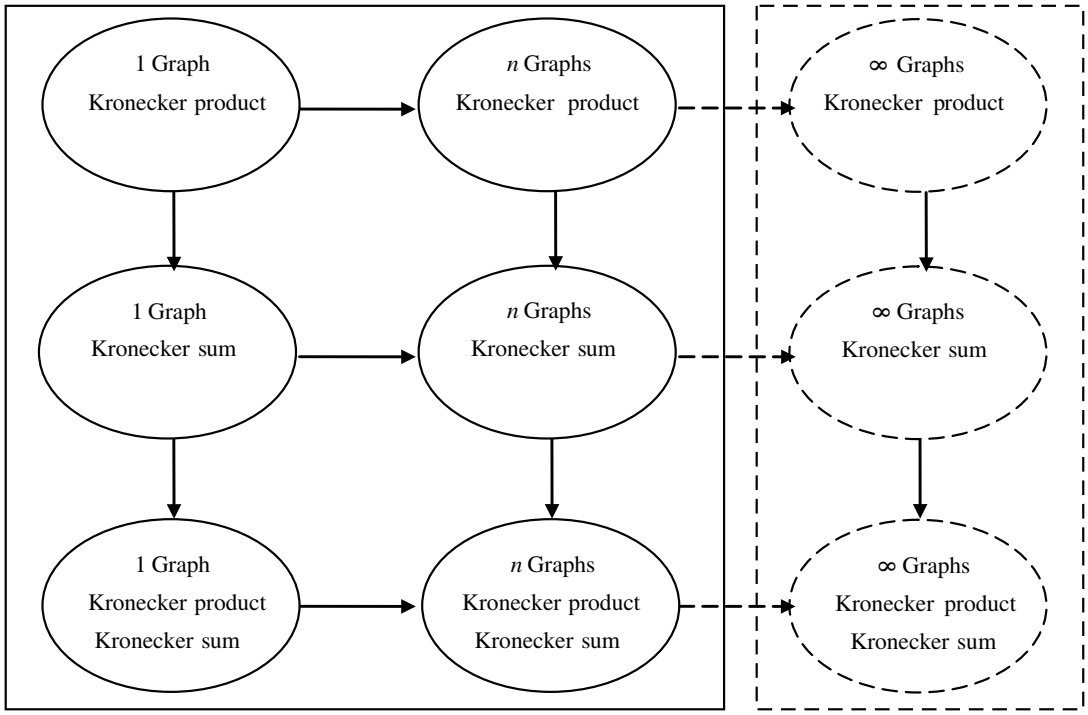

图 1 复杂网络 9 种组合关系图

Figure 1 Diagram of 9 combinations of complex network

定理 8 度分布相同的复杂网络数量与其对应的补图数量是相等的.

证明 对于一个有 $|V|$ 个节点的复杂网络 $G=(V, E)$ 而言, 其完全图 $K_{|V|}$ 需要每一个节点与其余的 $|V|-1$ 个节点相连, 而补图 G' 与图 G 是一一对应的, 即一个图 G 必然对应一个补图 G', 图 G 的数量与补图 G' 的数量相等. 定理 8 得证.

注 4 定理 8 说明在难以直接计算一类度分布已知的复杂网络的数量时, 可以通过计算其补图的数量而间接得到该类复杂网络的数量, 但仍未从根本上解决复杂网络的数量问题. 深入研究此类复杂

网络的数量规律是后续研究的重要内容.

4.2 基于矩阵运算的复杂网络扰动与稳定分析

复杂网络扰动与稳定分析是主要分析初始图的波动对基于矩阵运算的最终生成网络的影响, 尤其是在增加或删除一个节点或一条边时对复杂网络总体特性的影响. 下面先分析其对自相似网络的影响, 包括分形维数、网络直径和度分布 3 个方面的影响.

(20) 式给出了基于初始图 $G=(V, E)$ 生成的自相似网络分形维数, 分析在添加或删除一个节点及一条边对其分形维数的影响就是分析其分形维数对 x 的一阶导数. 将 (8) 及 (9) 式代入 (20) 式, 得到分形维数对 x 的一阶导数如下:

$$\begin{aligned}
\mathrm{dFD}(G)\mid_{x=1} &= \left.\frac{\mathrm{d}\frac{\log \mathrm{Poly}'(G)}{\log \mathrm{Poly}(G)}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} \\
&= \left.\frac{\log \mathrm{Poly}(G)\mathrm{d}\log \mathrm{Poly}'(G)\mathrm{dPoly}'(G)\mathrm{d}x - \log \mathrm{Poly}'(G)\mathrm{d}\log \mathrm{Poly}(G)\mathrm{dPoly}(G)\mathrm{d}x}{\log^2 \mathrm{Poly}(G)}\right|_{x=1} \\
&= \left.\frac{\mathrm{Poly}(G)\mathrm{Poly}''(G)\log \mathrm{Poly}(G) - \mathrm{Poly}'^2(G)\log \mathrm{Poly}'(G)}{\log^2 \mathrm{Poly}(G)\mathrm{Poly}(G)\mathrm{Poly}'(G)}\right|_{x=1} \\
&= \frac{\mathrm{Poly}''(G)\mid_{x=1} |V|\log|V| - 4|E|^2\log 2|E|}{2|E||V|\log^2|V|}.
\end{aligned} \tag{31}$$

对于一个给定的图 $G=(V, E)$ 而言, 其节点数 $|V|$ 及边数 $|E|$ 是确定的, 分形维数对 x 的一阶导数 $\mathrm{dFD}(G)\mid_{x=1}$ 取决于 $\mathrm{Poly}''(G)\mid_{x=1}$ 的取值, 故分形维数与度分布多项式的二阶导数密切相关. 于是, 在添加或删除节点或边时, 可以通过对度分布多项式的计算近似得到分形维数的变化情况.

对自相似网络直径的影响而言, 由于直径尚无类似于分形维数的显式函数可以表述, 故无法通过类似于分形维数的分析方法进行讨论. 但由于自相似网络的直径不超过初始图直径的两倍, 可以通过添加或删除一个节点或一条边时对初始图直径的影响进行间接的分析. 由于添加与删除是相对的, 我们只分析添加即可, 于是可以得到下述结论.

定理 9 初始图添加一个节点及至少一条边时, 直径的增加量不超过 1.

证明 向初始图添加一个节点及至少一条边时, 原始图中节点之间的最短距离不受影响, 但原始图中任一节点与新增节点的距离不超过原始图的直径加 1, 故直径的增量不超过 1. 定理 9 得证.

定理 10 初始图添加一条边时, 直径的减少量不超过一半.

证明 向初始图添加一条边时, 由于添加的边连接的两个节点是原始图中不相邻的节点, 导致原始图至少会增加一个回路, 回路中任意两个节点间的距离不超过回路中节点数目的一半, 故直径的减少量不超过一半. 定理 10 得证.

由于添加或删除一个节点或一条边时对初始图直径的影响存在确定的上限, 故对最终生成的自相似网络直径的影响也存在确定的上限.

对自相似网络度分布的影响而言, 在具体的计算中是将度分布多项式进行类似多项式乘法的系数相乘次数相乘的运算. 将 (25) 式代入 (7) 式得到

$$p(k) = \frac{\mathrm{d}^k \mathrm{Poly}(G)}{k!}\mid_{x=0} = \left.\frac{(d(v_i)\times d(v_j))!}{k!\,(d(v_i)\times d(v_j)-k)!}\sum_{i=1}^{|V_a|}\sum_{j=1}^{|V_b|} x^{d(v_i)\times d(v_j)}\right|_{x=0}. \tag{32}$$

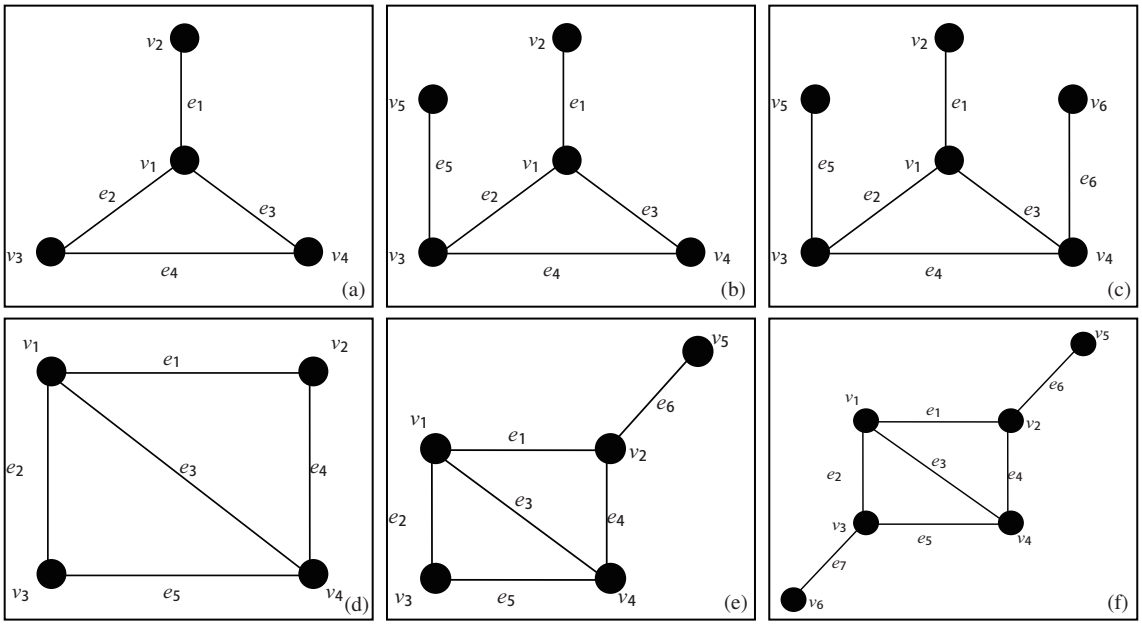

图 2 6 个不同初始网络

Figure 2 Six different initial networks. (a) G_a; (b) G_b; (c) G_c; (d) G_d; (e) G_e; (f) G_f

从 (32) 式可以看出, 在添加或删除一个节点或一条边时无法使用微分公式进行增量式地更新, 即其不可微, 故初始状况下添加或删除一个节点或一条边时的细微差异, 会在以后随着迭代次数的增长而由于连锁反应无限放大.

以下分析其对随机网络的影响, 主要是对随机网络度分布的影响. 对随机网络而言, 在具体的计算中是将节点度分布多项式进行通常多项式乘法的系数相乘次数相加的运算. 将 (26) 式代入 (7) 式得到

$$p(k)=\frac{\mathrm{d}^k\mathrm{Poly}(G)}{k!}\,|_{x=0}=\frac{(d(v_i)+d(v_j))!}{k!\,(d(v_i)+d(v_j)-k)!}\sum_{i=1}^{|V_a|}\sum_{j=1}^{|V_b|}x^{d(v_i)+d(v_j)}\Big|_{x=0}. \tag{33}$$

从 (33) 式可以看出, 在添加或删除一个节点或一条边时可以使用微分公式进行增量式的更新, 即其可微, 故初始状况虽然选用不同类型的图但最终生成的随机网络度分布的形态近似相同, 均呈钟形的正态分布.

尽管在分析新型网络模型扰动与稳定时使用了微积分的工具与方法, 得到了一些量化的结论, 但仍未完全洞悉新型网络模型扰动与稳定的机理, 充分利用微分方程等稳定性理论进行深入的分析是后续工作的重点.

5 基于矩阵运算的复杂网络仿真实验

选取 6 个简单的初始网络, 如图 2 所示, 其对应的信息如表 3 所示, 其迭代 20 次后得到的自相似网络度分布如图 3 所示.

从图 3 可以看出, 基于一个简单初始网络的 Kronecker 积图的度分布不同于经典的 ER 随机网络的泊松分布、WS 小世界网络的指数分布及 BA 无标度网络的幂律分布等其他类型的分布, 这体现了其自相似网络的特性. 在图 2 中, G_a, G_b, G_c, G_d, G_e, G_f 这 6 个初始图之间只存在一个节点或一条

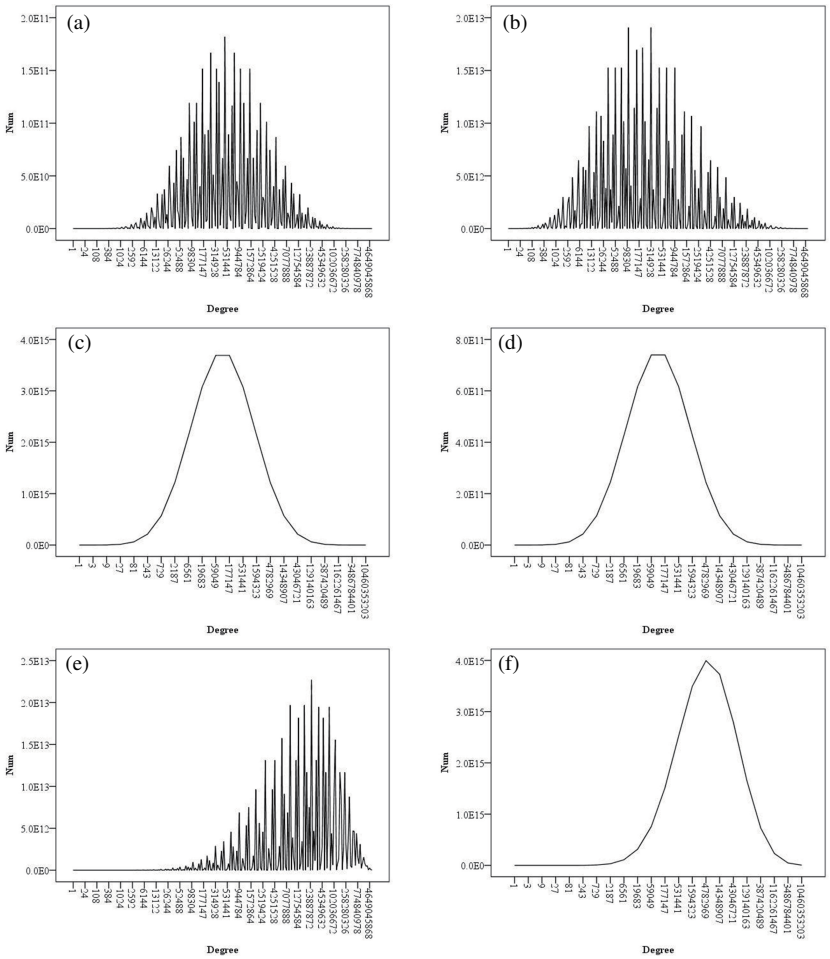

图 3　6 个初始网络迭代 20 次后得到的自相似网络度分布

Figure 3　Degree distributions of self-similarity networks for 6 initial networks iterating by 20 times. (a) G_a^{20}; (b) G_b^{20}; (c) G_c^{20}; (d) G_d^{20}; (e) G_e^{20}; (f) G_f^{20}

表 3　6 个不同初始网络统计表

Table 3　Statistics of 6 different initial networks

No.	Initial network	Degree polynomial	|Vertex|	|Edge|	Fractal dimension		Diameter	
					Exact value	Approximation	Initial network	Self-similarity network
1	G_a	x^3+2x^2+x	4	4	$\log_4 8$	1.5	2	4
2	G_b	$2x^3+x^2+2x$	5	5	$\log_5 10$	1.43068	3	4
3	G_c	$3x^3+3x$	6	6	$\log_6 12$	1.38685	3	4
4	G_d	$2x^3+2x$	4	5	$\log_4 10$	1.66096	2	2
5	G_e	$3x^3+x^2+x$	5	6	$\log_5 12$	1.54396	3	4
6	G_f	$4x^3+2x$	6	7	$\log_6 14$	1.47289	4	4

边的微小差异, 但在图 3 中迭代 20 次后得到的自相似网络的度分布却差异巨大, 其中 G_a 与 G_b 之间只存在一个节点及一条边的差异, G_a 与 G_d 只存在一条边的差异, 最终得到的结果差异却极为巨大,

表 4 6 个随机网络对应的 20 个初始网络选择表

Table 4 Six Random networks and the corresponding 20 initial networks

No.	Random network	Sequence of 20 initial networks selected
1	$G_1^{(20)}$	$G_dG_cG_fG_fG_bG_fG_dG_aG_eG_dG_fG_cG_fG_fG_bG_fG_bG_aG_aG_b$
2	$G_2^{(20)}$	$G_bG_cG_cG_cG_eG_bG_eG_aG_bG_bG_cG_eG_eG_fG_bG_dG_bG_eG_dG_e$
3	$G_3^{(20)}$	$G_fG_dG_cG_dG_bG_aG_fG_eG_eG_eG_fG_bG_aG_eG_fG_eG_dG_bG_aG_e$
4	$G_4^{(20)}$	$G_fG_cG_bG_aG_eG_aG_bG_eG_bG_aG_cG_bG_aG_eG_eG_eG_bG_eG_dG_f$
5	$G_5^{(20)}$	$G_aG_bG_fG_cG_eG_bG_aG_dG_fG_eG_dG_bG_cG_aG_eG_fG_cG_cG_aG_b$
6	$G_6^{(20)}$	$G_fG_cG_eG_bG_aG_aG_dG_cG_eG_bG_bG_cG_eG_eG_eG_aG_dG_dG_cG_b$

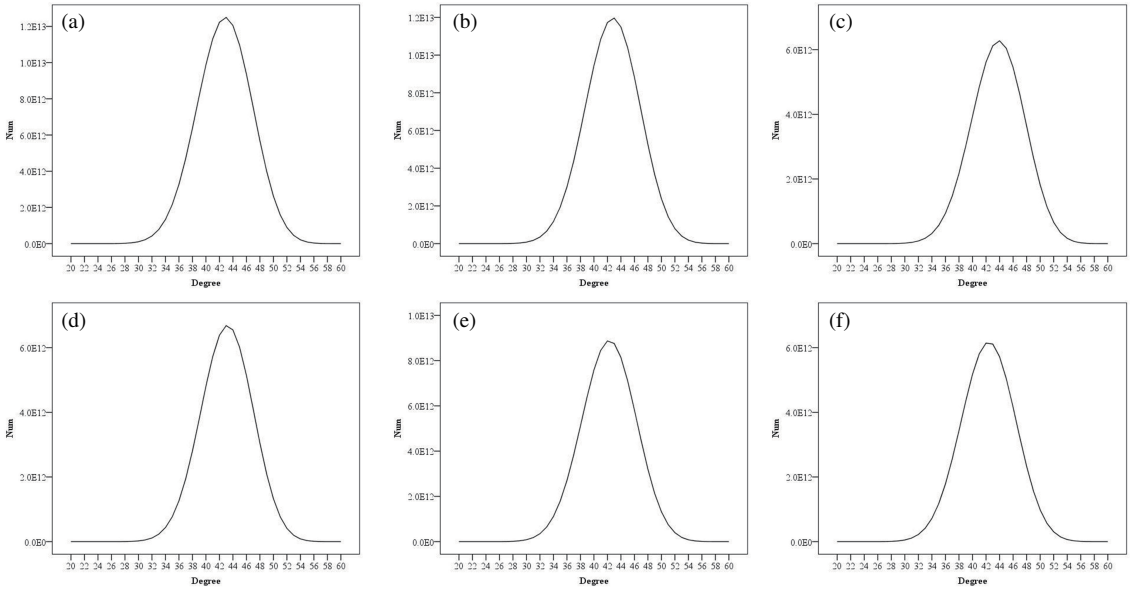

图 4 随机选择 20 个初始网络后得到的随机网络度分布

Figure 4 Random networks degree distributions when randomly selecting 20 initial networks. (a) $G_1^{(20)}$; (b) $G_2^{(20)}$; (c) $G_3^{(20)}$; (d) $G_4^{(20)}$; (e) $G_5^{(20)}$; (f) $G_6^{(20)}$

呈现出典型的 “蝴蝶效应” 特点, 这其实就是复杂网络的 “变数”.

同时, 通过分析表 3 我们可以发现, 在增加或删除一个节点或一条边时, 对最终得到的自相似网络的分形维数影响不大, 而且相对于添加或删除边, 添加或删除节点对分形维数的影响更大, 这可以通过表 3 中分形维数差别不大体现出来. 而且, 其对网络直径的影响也是有限的, 这可以通过表 3 中网络直径的差别不超过 2 体现出来, 这其实就是复杂网络的 “定数”. 定数与变数共存是复杂网络的特点.

同样基于图 2 中的 6 个初始网络, 从中依次选取 20 个, 允许重复选取, 共重复 6 次, 分别记为 $G_1^{(20)}$, $G_2^{(20)}$, $G_3^{(20)}$, $G_4^{(20)}$, $G_5^{(20)}$ 和 $G_6^{(20)}$, 选择次序如表 4 所示, 得到的随机网络的度分布如图 4 所示.

从图 4 可以看出, 随机选择的 20 个初始网络对应的邻接矩阵的 Kronecker 和运算得到的邻接矩阵对应网络的度分布呈钟形的正态分布, 这验证了有限个正态分布的线性组合仍是正态分布, 也验证了通过多个简单初始网络对应的邻接矩阵的 Kronecker 和运算可以得到随机网络.

6 结论

本文研究了基于矩阵运算的两个复杂网络构建方法 —— 自相似网络与随机网络. 基于一个简单初始网络邻接矩阵的迭代 Kronecker 积运算可以得到自相似网络, 其自相似特性源于分形矩阵形式的邻接矩阵, 对连通且非二分图形式的初始网络, 得到的自相似网络同时具有小世界特性, 而且通过与经典的 Koch 雪花对比, 进一步阐述了所构建的自相似网络的性质. 同时提出了准自相似网络与泛自相似网络的概念. 基于多个简单初始网络邻接矩阵的 Kronecker 和运算可以得到随机网络, 其随机特性源于有限个正态分布的线性组合. 此外, 借助度分布多项式可以从理论上严格计算出基于矩阵运算所构建的复杂网络的度分布, 并可对复杂网络的数量及扰动与稳定做出量化的分析. 后续研究的重点在于结合实际网络的特点分析所提出的复杂网络构建方法得到的复杂网络各项特性, 并应用稳定性理论等工具与方法进行深入的分析研究.

参考文献

1 Erdos, Renyi A. On random graphs I. Publ Math, 1959, 6: 290–297

2 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of 'small-world' networks. Nature, 1998, 393: 440–442

3 Newman M E J, Watts D J. Renormalization group analysis of the small-world network model. Phys Lett A, 1999, 293: 341–346

4 Barabasi A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. Science, 1999, 286: 509–512

5 Barabasi A L, Ravasz E, Vicsek T. Deterministic scale-free networks. Phys A, 2001, 299: 559–564

6 Francesc C, Michael S. Deterministic small-word networks. Phys A, 2002, 309: 231–235

7 Song C, Jalvin S, Makse H A. Self-similarity of complex networks. Nature, 2005, 433: 392–395

8 Wu X P, Wang J S, Qin Y L, et al. Invulnerability of small-world network against cascading failure based on nonlinear load-capacity model. J Comm, 2014, 35: 1–7 [吴晓平, 王甲生, 秦艳琳, 等. 非线性负载容量模型的小世界网络级联抗毁性研究. 通信学报, 2014, 35: 1–7]

9 Ren X Y, Zhou P L. Study on the self-organized financial model based on scale-free networks. J Univ Sci Technol China, 2014, 44: 74–78 [任小叶, 周佩玲. 基于无标度网络的自组织金融模型研究. 中国科学技术大学学报, 2014, 44: 74–78]

10 Rudolph L M, Muller L E. Algebraic approach to small-world network models. Phys Rev E, 2014, 89: 012812

11 Galiceanu M, Reis A S, Dolgushev M. Dynamics of semiflexible scale-free polymer networks. J Chem Phys, 2014, 141: 144902

12 Wang C, Hu F, Bian Y D, et al. Survey on the low-energy consumption wireless sensor network of cluster level topology with the small-world property. Sci Sin Inform, 2014, 44: 1281–1289 [王潮, 胡凤, 卞阳东, 等. 具有小世界特性的低能耗无线传感器网络簇级拓扑研究. 中国科学: 信息科学, 2014, 44: 1281–1289]

13 Liu Z Z, Wang F B. Research on weighted scale-free topology with balancing energy consumption characteristics in wireless sensor networks. Acta Phys Sin, 2014, 63: 190504 [刘洲洲, 王福豹. 一种能耗均衡的无线传感器网络加权无标度拓扑研究. 物理学报, 2014, 63: 190504]

14 Peng A Y, Zhang L M. Deterministic multidimensional growth model for small-world networks. J Comput Inform Syst, 2014, 10: 807–816

15 Emmerich T, Bunde A, Havlin S. Structural and functional properties of spatially embedded scale-free networks. Phys Rev E, 2014, 89: 062806

16 Xiong W H, Gao Q S, Zhang S Y. Adjacency matrix and spectral density of complex networks. J Wuhan Univ Technol (Transportation Sci Eng), 2009, 33: 83–86 [熊文海, 高齐圣, 张嗣瀛. 复杂网络的邻接矩阵及其特征谱. 武汉理工大学学报 (交通科学与工程版), 2009, 33: 83–86]

17 Jalan S, Bandyopadhyay J N. Random matrix analysis of complex networks. Phys Rev E, 2007, 76: 046107

18 Wu Y H, Lou M L. The gauge of multifractal components for some self-similar sets. Sci Sin Math, 2014, 44: 221–234 [吴亚豪, 娄曼丽. 一类自相似集重分形分支的量纲. 中国科学: 数学, 2014, 44: 221–234]

19 Wang H Y, Yang S Z. Construction and properties of fractal interpolation surfaces with variable free parameters. Acta

Math Sin Chin Ser, 2014, 57: 223–234 [王宏勇, 杨守志. 具有变量自由参数的分形插值曲面的构造与性质. 数学学报, 2014, 57: 223–234]
20 Seo S H, Kim Y J, Lee H J. Interactive fractal tree generation method having multiple clipping volumes. Inter J Multimedia Ubiquitous Eng, 2014, 9: 337–342
21 Breckner B E, Varga C. A note on gradient-type systems on fractals. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2015, 21: 142–145
22 Zhou J, Yang S B. Wave function fractal dimensions for the periodically kicked free top. Acta Phys Sin, 2014, 63: 220507 [周洁, 杨双波. 周期受击陀螺系统波函数的分形. 物理学报, 2014, 63: 220507]
23 Wang Z W, Li S Z. Adaptive fractal-wavelet image denoising base on multivariate statistical model. Chin J Comput, 2014, 37: 1380–1389 [王智文, 李绍滋. 基于多元统计模型的分形小波自适应图像去噪. 计算机学报, 2014, 37: 1380–1389]
24 Xiu C B, Wang T T, Tian M, et al. Short-term prediction method of wind speed series based on fractal interpolation. Chaos, Solitons and Fractals, 2014, 68: 89–97
25 Rahimi H. Study of self-similar fractal structures composed of lossy single-negative materials with multiple defect layers. Optical Quantum Electr, 2014, 46: 649–658
26 Song C, Havlin S, Makse H A. Origins of fractality in the growth of complex networks. Nature Phys, 2006, 2: 275–281
27 Zhang S Y. The law of emergence of self-similar structures in complex systems and complex networks. Complex Syst Complex Sci, 2006, 3: 41–51 [张嗣瀛. 复杂系统、复杂网络自相似结构的涌现规律. 复杂系统与复杂性科学, 2006, 3: 41–51]
28 Zhang X D, Li Z L. Graph Theory and Its Applications. Beijing: Higher Education Press, 2005. 3–5 [张先迪, 李正良. 图论及其应用. 北京: 高等教育出版社, 2005. 3–5]
29 Newman M E J. The structure and function of complex networks. SIAM Review, 2003, 45: 167–256
30 Newman M E J, Strogatz S H, Watts D J. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. Phys Rev E, 2001, 64: 261181–261187
31 Zhu H, Ji C C. Fractal Theory and Its Applications. Beijing: Science Press, 2011. 262–316 [朱华, 姬翠翠. 分形理论及其应用. 北京: 科学出版社, 2011. 262–316]
32 Andre M B. On a class of fractal matrices (I): excess-matrices and their self-similar properties. Inter J Bifurcat and Chaos, 1992, 2: 841–860
33 Andre M B. Artistic design with fractal matrices. Visual Comput, 1993, 9: 233–238
34 Jeffrey S, Jorge S. Two methods for generating fractal. Comput Graph, 1989, 13: 185–191
35 Peter R M. Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets. Pittsburgh: Academic Press, 1994. 135–355
36 Sun H Q. Fractal geometry and study on fractal interpolation. J Hebei Univ Technol, 2002, 31: 56–60 [孙洪泉. 分形几何及其分形插值研究. 河北工业大学学报, 2002, 31: 56–60]

Complex network construction based on matrix operation

Shengjiu LIU[1,2], Tianrui LI[1,2*], Shi-Jinn HORNG[1,2, 3], Hongjun WANG[1,2] & Jie ZHU[1,2,4]

1 *School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu* 611756*, China*;
2 *Sichuan Key Lab of Cloud Computing and Intelligent Technique, Chengdu* 611756*, China*;
3 *Department of Computer Science and Information Engineering, National Taiwan University of Science and Technology, Taipei* 10607*, China*;
4 *Department of Computer Science, Tibetan University, Lhasa* 850000*, China*
*E-mail: trli@swjtu.edu.cn

Abstract In this study, we explore complex networks from the perspective of an adjacency matrix and investigate approaches for constructing these networks based on the Kronecker product and Kronecker sum. The Kronecker product is iteratively applied to the adjacency matrix of a simple initial network; then, a Kronecker product graph is obtained. It is a self-similar network with a fractal dimension no larger than 2. If the initial

network is a connected and non-bipartite graph, the obtained complex network is also a small-world network, and its diameter does not exceed twice that of the initial network. Furthermore, the Kronecker sum is sequentially applied to the adjacency matrixes of multiple simple initial networks and then a Kronecker sum graph is obtained. It is a random network, which has the degree distribution as a normal distribution. Finally, several properties of approaches for constructing complex networks based on matrix operation are presented.

Keywords complex networks, matrix operations, self-similar network, fractal dimension, random network

Shengjiu LIU was born in 1988. He received his B.S. degree in China from the Southwest Jiaotong University, Chengdu in 2010. Currently, he is pursuing his Ph.D. degree in Computer Science and Technology at Southwest Jiaotong University. His research interests include complex network, data mining, knowledge discovery, and natural language understanding.

Tianrui LI was born in 1969. He received his Ph.D. degree in China from Southwest Jiaotong University, Chengdu in 2002. Currently, he is a professor and Director at Key Laboratory of Cloud Computing and Intelligent Techniques, School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu, China. His research interests include data mining, knowledge discovery, granular computing, and rough sets.

Shi-Jinn HORNG was born in 1957. He received his Ph.D. degree in Taiwan from National Tsing Hua University, Hsinchu in 1989. Currently, he is a professor and director at the Department of Computer Science and Information Engineering, National Taiwan University of Science and Technology, Taiwan. His research interests include VLSI design, multiprocessing system, and parallel algorithm.

Hongjun WANG was born in 1977. He received his Ph.D. degree in China from Sichuan University, Chengdu in 2009. Currently, he is an associate professor at the Key Laboratory of Cloud Computing and Intelligent Techniques, School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu, China. His research interests include machine learning, semi-supervised learning, and semi-supervised ensemble learning.