中国科学: 信息科学 2016 年 第 46 卷 第 3 期: 291–310
SCIENTIA SINICA Informationis
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

论 文

# 半代数经济模型的均衡点计算: 一种代数方法

李晓亮

东莞理工学院计算机学院, 东莞 523808
E-mail: xiaoliangbuaa@gmail.com

收稿日期: 2015–04–07; 接受日期: 2015–06–03; 网络出版日期: 2016–02–22
国家自然科学基金 (批准号: 11326210) 资助项目

**摘要** 半代数经济模型指的是均衡点可以用半代数系统刻画的经济模型, 通常包括静态均衡模型和动态均衡模型两大类. 本文介绍了将静态均衡模型的多均衡检测问题以及动态均衡模型的稳定性分析问题转化为半代数系统实解计数问题的一般方法, 并针对无参数和带参数两种情形分别提供了分析半代数系统实解个数的系统化算法. 与 Kubler 和 Schmedders 给出的方法相比, 本文介绍的方法考虑了不等式约束, 并可以给出均衡点的精确个数. 对几个具体的经济模型均衡点的计算分析结果显示了所提算法的有效性.

**关键词** 均衡点 半代数经济模型 半代数系统 微分方程 稳定性 三角分解

## 1 引言

经济模型中的均衡点刻画了需求和供给达到平衡时的稳定状态. 例如, 在市场经济中的价格均衡点是通过竞争建立的, 市场达到均衡时商品与服务的需求和供给相等, 此时商品的价格形成. 均衡模型在经济学的各个领域如微观经济学、宏观经济学、国际贸易和公共财政中应用广泛 [1]. 通常将均衡模型分为静态均衡模型和动态均衡模型两大类.

静态均衡模型的均衡点可用方程组的实解来刻画, 它通常用于描述经济系统中的数量 (如价格) 可能出现的长期状态. 处理静态均衡模型时, 经济学家总是假设竞争均衡点是全局唯一的. 但是, 在现实中这一假设并不合理. 例如, 在现实校准模型中, 估计多均衡点现象出现的可能性仍是一个公开问题. Gjerstad 指出: 当替换弹性大于 2 时, 带 CES 效用函数的纯粹交换经济模型中多均衡现象普遍存在1).

多均衡检测是经济学的一个重要问题, 因为多个均衡点的出现会导致使用现有理论和方法进行经济模型分析与经济趋势预测时的严重错误, 例如比较静态分析 [2] 在多均衡情形下可能失效. 另外, 从实用的角度考虑, 经济学家赋予的保证均衡点唯一性的充分条件过于严苛, 从而限制了均衡模型在现

1) Gjerstad S. Multiple equilibria in exchange economies with homothetic, nearly identical preference. Center for Economic Research, University of Minnesota, Discussion Paper 288, 1996.

引用格式: 李晓亮. 半代数经济模型的均衡点计算: 一种代数方法. 中国科学: 信息科学, 2016, 46: 291–310, doi: 10.1360/N112014-00227

实中的使用. 但是, 这些充分条件的不满足并不意味着多均衡现象一定存在, 条件不满足时现有的理论和方法可能仍然适用. 因此, 多均衡检测具有理论与实际的双重意义.

在某些情况下, 经济学家需要研究市场中商品价格等经济量的动态形成过程. 这种过程必须采用动态均衡模型才能描述. 对于动态模型, 人们通常更关心其稳定均衡点. 这是因为稳定均衡点刻画了经济系统的长期动态趋势, 对于预测经济走势具有重要意义. 相比静态模型均衡点的唯一性, 动态模型的稳定均衡点的唯一性显得更为重要. 在建立经济模型时, 动态均衡模型是否稳定也是一个重要的问题. 经济学家总是期望所构建的模型是全局稳定的, 但这在现实中往往也难以实现. 经过多年的研究, 人们获得了一些充分条件用以保证动态模型的均衡点全局稳定, 例如可以假设所有商品均为总替代品 (gross substitute), 或者假设商品的需求函数满足所谓的弱法则 (the weak law of market demand). 这些充分条件同样过于严苛, 现实中的经济系统鲜有满足. 于是便产生了一个自然的问题: 对于某个具体的动态均衡模型, 能否给出其均衡点稳定的充要条件.

无论是静态的还是动态的均衡模型, 传统的计算方法基本上都是基于数值计算的, 其弱点在于:

- 数值方法可能遭遇数值稳定性问题, 导致计算结果完全不可信;
- 许多模型涉及不等式, 数值结果的不精确性使得这些不等式是否满足难以判定;
- 绝大多数的数值方法只能搜索一个均衡点, 不适用于多均衡检测问题;
- 数值方法不能用于发现和证明经济模型的理论性质.

所以, 人们希望发展能够精确地计算应用经济模型中所有均衡点的高效算法.

本文用半代数经济模型来统称均衡点可以最终转化为由半代数系统 (其定义见下节) 刻画的经济模型, 包括竞争模型与策略互动模型等. 在文献 [3, 4] 中, Kubler 和 Schmedders 系统地研究了半代数静态均衡模型的多均衡点检测问题. 显然, 这一问题可以转化为判定对应的半代数系统是否具有多个互异实解. Kubler 和 Schmedders 给出的解决方案的基本思想是: 通过 Gröbner 基将半代数系统的等式部分转化为一组更简单的等价方程组, 使得方程组中仅有一个非线性等式 (设为 $G_1 = 0$) 且 $G_1$ 为一元多项式, 则半代数系统的实解个数可以通过 $G_1 = 0$ 的实根个数来估计.

相关的工作还有很多. 例如, Datta [5,6] 比较了 Gröbner 基方法与同伦连续方法在博弈论中计算全部的完全混合 Nash 均衡点时的优劣. Chatterji 和 Gandhi 将计算 Galois 理论应用到所谓的带无理均衡的有理支付博弈的 Nash 均衡点计算问题中, 收到了较好的效果2). 此外, Judd 等 [7] 使用同伦连续方法来研究带连续策略的静态与动态博弈问题, 并计算出了一类均衡点个数随市场大小变化的 Bertrand 定价模型的均衡流形.

在文献 [8] 中, Wang 与本文作者从另一角度研究了半代数静态均衡模型的多均衡检测问题, 推广了 Kubler 和 Schmedders 的方法. 与 Kubler 和 Schmedders 的方法相比, 文献 [8] 中给出的算法是基于三角分解的, 后者是一类与 Gröbner 基类似的多项式系统消元方法. 该方法还考虑了半代数系统中的不等式约束, 可以精确地确定半代数系统的互异实解个数, 而不仅只是给出实解个数的上界. 该方法比 Kubler 和 Schmedders 的方法更系统、更一般. 本文是对文献 [8] 中工作的扩展, 除了讨论半代数静态均衡模型的多均衡检测问题之外, 还研究了动态均衡模型的稳定性分析问题, 给出了将稳定性分析问题转化为代数问题的一般方法. 另外, 本文还选取了更多的经济模型进行计算分析, 所得结果验证了原有的经济学理论的正确性并发现了一些有意思的新结论.

文章的结构如下. 第 2 节讨论如何将静态均衡模型的多均衡检测以及动态均衡模型的稳定性分析转化为半代数系统实解计数问题. 第 3 节给出两个算法: 一个用于计算无参数半代数系统的互异实

2) Chatterji S, Gandhi R. An algebraic approach for computing equilibria of a subclass of finite normal form games. arXiv preprint, arXiv:1005.5507, 2010.

解个数, 而另一个用于对带参数的半代数系统进行实解分类. 第 4 节, 选取几个具体的经济模型进行计算分析, 所得的计算结果显示本文给出的算法是有效的. 最后一节总结全文, 评价新算法的优劣并展望未来的工作.

## 2 均衡点计算转化为代数问题

首先给出将静态均衡模型的多均衡检测问题以及动态均衡模型的稳定性分析问题转化为半代数系统实解计数问题的一般方法. 半代数系统 (semi-algebraic system) 是指满足如下形式的系统:

$$\begin{cases} F_1(u_1,\ldots,u_d,x_1,\ldots,x_n)=0, \\ \qquad\vdots \\ F_n(u_1,\ldots,u_d,x_1,\ldots,x_n)=0, \\ P_1(u_1,\ldots,u_d,x_1,\ldots,x_n)\lessgtr 0, \\ \qquad\vdots \\ P_r(u_1,\ldots,u_d,x_1,\ldots,x_n)\lessgtr 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中符号 $\lessgtr$ 表示 $>, \geqslant, <, \leqslant$ 和 $\neq$ 中的一个, $F_i, P_j$ 均为实数域 $\mathbb{R}$ 的多项式, $u_1,\ldots,u_d$ 为系统的参数, $x_1,\ldots,x_n$ 为变元.

### 2.1 静态均衡模型

以交换经济模型为例展开讨论, 这一小节给出的方法适用于其他更一般的静态均衡模型. 假设交换经济模型有 $H$ 个代理人 $h\in\mathcal{H}=\{\infty,\ldots,\mathcal{H}\}$, 以及 $L$ 种商品 $l\in\mathcal{L}=\{\infty,\ldots,\mathcal{L}\}$. 用 $\mathbb{R}^L_+$ 表示所有分量均为非负实数的 $L$ 维向量构成的集合, 并记 $\mathbb{R}^L_{++}=\mathbb{R}^L_+\setminus\{(0,\ldots,0)\}$. 设每位代理人的消费集 (consumption set) 均为 $\mathbb{R}^L_+$, 这意味着每位代理人对每种商品的消费量都非负. 用 $\boldsymbol{p}=(p_1,\ldots,p_L)$ 表示所有商品价格构成的向量, 显然对所有的商品 $l\in\mathcal{L}$ 都有 $p_l>0$. 每位代理人 $h\in\mathcal{H}$ 的特征由其初始禀赋 (endowment) $\boldsymbol{e}_h=(e_{h1},\ldots,e_{hL})\in\mathbb{R}^L_{++}$, 即初始时刻对每种商品的拥有量, 以及一个效用函数 (utility function) $u_h:\mathbb{R}^L_+\to\mathbb{R}$ 唯一地刻画. 根据效用函数最大化的原则, 商品将在各个代理人之间重新分配, 并由此产生价格.

**定义1** 如果价格向量 $\boldsymbol{p}$ 以及分配 $(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_H)$ 满足

(a) 对所有的 $h\in\mathcal{H}$ 都有 $\boldsymbol{c}^h\in\arg\max u_h(\boldsymbol{c})$, 其中 $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^L_+$ 且有 $\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{e}_h)\leqslant\boldsymbol{0}$[3) (预算限制条件),

(b) $\sum_{h\in\mathcal{H}}(\boldsymbol{c}_h-\boldsymbol{e}_h)=\boldsymbol{0}$ (市场出清条件),

则称 $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_H)$ 为以上交换模型的均衡点 (equilibrium).

为使讨论简单, 我们假设所有效用函数 $u_h$ 均为 $\mathbb{R}^L_{++}$ 上严格单调递增且严格凹的 $C^1$ 函数. 此时, 定义 1 的条件 (a) 可以转化为一阶条件

$$\frac{\partial u_h(\boldsymbol{c}_h)}{\partial c_{hl}}-\lambda_h p_l=\boldsymbol{0},\quad h=1,\ldots,H,\quad l=1,\ldots,L, \tag{2}$$

以及

$$\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{c}_h-\boldsymbol{e}_h)=\boldsymbol{0},\quad h=1,\ldots,H,$$

3) 这里 "·" 表示向量内积.

其中 $\partial u_h(\boldsymbol{c}_h)/\partial c_{hl}$ 表示 $u_h$ 对其变元 $c_{hl}$ 的偏导数, 称为边际效用函数 (marginal utility function), 而 $\lambda_h$ 为引入的 Lagrange 乘子. 根据 Walras 法则, 我们可将价格 $\boldsymbol{p}$ 规范化, 常见的方法有: 对某个选定的 $l \in \mathcal{L}$, 令 $p_l = 1$; 或者令 $\sum_{l\in\mathcal{L}} p_l = 1$. 假设选取的价格规范化方程为 $N(\boldsymbol{p}) = 1$ 而 $N$ 为多项式, 则定义 1 的条件 (b) 可以替换为

$$N(\boldsymbol{p}) = 1, \quad \sum_{h\in\mathcal{H}} (c_{hl} - e_{hl}) = 0, \quad l = 1, \dots, L-1.$$

我们将有限个半代数系统的实解集之并称为半代数集 (semi-algebraic set). 设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 以及 $B \subseteq \mathbb{R}^m$ 为半代数集, 称函数 $\phi\colon\ A \to B$ 为半代数函数 (semi-algebraic function), 如果像集

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} \,|\, x \in A,\ y \in B,\ y = \phi(x)\big\}$$

为半代数集. 半代数函数的范围很广, 如多项式函数和有理函数都属于半代数函数的范畴. 应用经济学中很多常用的效用函数或者边际效用函数为半代数函数. 下面假设我们模型中所考虑的边际效用 $\partial u_h(\boldsymbol{c}_h)/\partial c_{hl}$ 均为半代数函数. 以下引理揭示了半代数函数的关键性质.

**引理1** [3] 设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$, 而 $\phi\colon\ A \to \mathbb{R}$ 为半代数函数, 则必存在非零实系数多项式 $F(x_1, \dots, x_n, y)$, 使得对任意 $(x_1, \dots, x_n) \in A$ 都有 $F(x_1, \dots, x_n, \phi(x_1, \dots, x_n)) = 0$.

由以上引理可知一定存在非零多项式 $F_{hl}(x_1, \dots, x_L, y)$ 使得 $F_{hl}(c_1, \dots, c_L, \partial u_h(\boldsymbol{c}_h)/\partial c_{hl}) = 0$. 再由式 (2) 得 $u_h(\boldsymbol{c}_h)/\partial c_{hl} = \lambda_h p_l$, 于是有 $F_{hl}(c_1, \dots, c_L, \lambda_h p_l) = 0$. 因此, 判定交换经济模型是否存在多个均衡点的问题最终转化为分析如下半系统的实解个数:

$$\begin{cases}
F_{hl}(c_1, \dots, c_L, \lambda_h p_l) = 0, \quad h = 1, \dots, H,\ l = 1, \dots, L, \\
\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{c}_h - \boldsymbol{e}_h) = \boldsymbol{0}, \quad h = 1, \dots, H, \\
\sum_{h\in\mathcal{H}} (c_{hl} - e_{hl}) = 0, \quad l = 1, \dots, L-1, \\
N(p_1, \dots, p_L) = 1, \\
p_l > 0, \quad l = 1, \dots, L, \\
c_{hl} \geqslant 0, \quad h = 1, \dots, H,\ l = 1, \dots, L, \\
\lambda_h > 0, \quad h = 1, \dots, H, \\
e_{hl} \geqslant 0, \quad h = 1, \dots, H,\ l = 1, \dots, L,
\end{cases}$$

其中 $p_l, c_{hl}, \lambda_h$ 为系统的变元, 而 $e_{hl}$ 为系统的参数.

### 2.2 动态均衡模型

动态均衡模型通常用微分方程或者差分方程进行描述. 为使讨论简单, 我们仅考虑可由如下形式的常微分方程组刻画的动态均衡模型:

$$\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{A_1(u_1, \dots, u_d, x_1, \dots, x_n)}{B_1(u_1, \dots, u_d, x_1, \dots, x_n)}, \\
\qquad\qquad \vdots \\
\dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = \dfrac{A_n(u_1, \dots, u_d, x_1, \dots, x_n)}{B_n(u_1, \dots, u_d, x_1, \dots, x_n)}, \\
P_i(u_1, \dots, u_d, x_1, \dots, x_n) \gtrless 0, \quad i = 1, \dots, r,
\end{cases} \tag{3}$$

其中 $A_1,\dots,A_n$, $B_1,\dots,B_n$ 以及 $P_1,\dots,P_r$ 为非零实系数多项式, $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$ 为变元, 而 $\boldsymbol{u}=(u_1,\dots,u_d)$ 为与时间 $t$ 无关的参数. 不等式 $P_i\leqslant 0$ 描述了模型的参数和变元应满足的符合经济学意义的约束条件 (商品价格为正、初始禀赋非负等).

**定义2**　对于给定的参数取值 $\bar{\boldsymbol{u}}\in\mathbb{R}^d$, 将满足以下方程的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 称为动态均衡模型的均衡点:

$$A_j(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{x}})=0,\quad B_j(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{x}})\neq 0,\quad j=1,\dots,n,\quad P_i(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{x}})\leqslant 0,\quad i=1,\dots,r.$$

更进一步, 假设初始值 $\boldsymbol{x}(0)$ 的取法始终满足经济约束条件, 即 $P_i(\bar{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{x}(0))\leqslant 0$, $i=1,\dots,r$, 则均衡点 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为

- Lyapunov 稳定的 (Lyapunov stable), 如果对任意 $\epsilon>0$ 都存在 $\delta>0$, 使得只要 $||\boldsymbol{x}(0)-\bar{\boldsymbol{x}}||<\delta$ 就有 $||\boldsymbol{x}(t)-\bar{\boldsymbol{x}}||<\epsilon$;
- 渐进稳定的 (asymptotically stable), 如果 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 Lyapunov 稳定的, 并且存在 $\delta>0$, 只要 $||\boldsymbol{x}(0)-\bar{\boldsymbol{x}}||<\delta$ 就有 $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=\bar{\boldsymbol{x}}$;
- 全局稳定的 (globally stable), 如果 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 Lyapunov 稳定的, 并且对所有的初始值 $\boldsymbol{x}(0)$ 都有 $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)=\bar{\boldsymbol{x}}$.

我们将渐进稳定的均衡点简称为稳定均衡点.

对于动态经济模型来说, 稳定均衡点比不稳定的均衡点更有实际意义. 因此, 人们关心的主要问题是: 确定动态经济模型中稳定均衡点的个数. 解决这一问题, 我们可以采用 Lyapunov 第一方法进行局部分析. 考虑 Jacobian 矩阵

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\frac{\partial\frac{A_1}{B_1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\frac{A_1}{B_1}}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\frac{A_n}{B_n}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\frac{A_n}{B_n}}{\partial x_n}\end{bmatrix}.$$

**定理1** [9]　设 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 为取定的参数, $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为系统 (3) 的均衡点. 如果矩阵 $\boldsymbol{J}(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{x}})$ 的所有特征值的实部均为负, 则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为渐进稳定的均衡点. 如果矩阵 $\boldsymbol{J}(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{x}})$ 至少有一个特征值的实部为正, 则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为不稳定的均衡点.

假设 $\boldsymbol{J}(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{x}})$ 的特征方程为

$$a_0\xi^n+a_1\xi^{n-1}+\cdots+a_n=0. \tag{4}$$

此时问题转化为确定式 (4) 的所有复根是否都具有负实部, 常用的方法包括 Routh 表 [10], Routh–Hurwitz 判据 [9] 以及 Lienard–Chipart 判据 [11] 等. 由于篇幅的限制, 下面仅对 Routh–Hurwitz 判据进行简单地介绍. 关于其他方法, 读者可参考相应的文献.

构造式 (4) 中多项式的 $n$ 阶 Routh–Hurwitz 矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2n-1}\\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2n-2}\\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2n-3}\\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{2n-4}\\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{2n-5}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\end{bmatrix},$$

如果 $i > n$, 则取 $a_i = 0$. 用 $M_1, \ldots, M_n$ 表示 Routh–Hurwitz 矩阵的 $n$ 个顺序主子式.

**定理2** (Routh–Hurwitz 判据) [9] 特征方程 (4) 的所有复根的实部均为负当且仅当 $M_1 > 0, \ldots, M_n > 0$.

由以上定理可知, 要计算动态均衡模型 (3) 的稳定均衡点的个数, 只需计算如下半代数系统的互异实解个数即可:

$$\begin{cases} A_j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = 0, & j = 1, \ldots, n, \\ B_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) \neq 0, & k = 1, \ldots, n, \\ P_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) \leqslant 0, & i = 1, \ldots, r, \\ M_l(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) > 0, & l = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 为变元, $\boldsymbol{u}$ 为参数. 上面给出的局部分析方法在生物系统稳定性分析中已经有比较成功的应用, 参见文献 [12∼14] 等.

## 3 主要算法

我们已经将静态与动态均衡模型的相关问题转化为了半代数系统实解计数的问题. 本节给出两个算法: 一个用于计算无参数半代数系统的互异实解个数, 而另一个用于对带参数的半代数系统进行实解分类. 这两个算法对文献 [8] 中给出的算法的细节进行了优化. 作为基础, 先介绍算法中需要用到的预备知识.

### 3.1 预备知识

符号 $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 上变元为 $x_1, \ldots, x_n$ 的多项式环. 假定变元序为 $x_1 < \cdots < x_n$. 对任意非常数多项式 $F \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] \setminus \mathbb{R}$, 用 $\mathrm{lv}(F)$ 表示 $F$ 的首变元 (leading variable), 即 $F$ 中出现的最大变元.

**定义3** 称有序非常数多项式集合 $[T_1, \ldots, T_r] \subseteq \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ 为三角列 (triangular set), 如果对任意 $i < j$ 都有 $\mathrm{lv}(T_i) < \mathrm{lv}(T_j)$. 称三角列 $[T_1, \ldots, T_r] \subseteq \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ 为拟线性的 (quasi-linear), 如果对任意 $i = 2, \ldots, r$ 均有 $\deg(T_i, \mathrm{lv}(T_i)) = 1$.

设 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ 为多项式集合. 用 $\mathrm{Zero}(\mathcal{P})$ 表示 $\mathcal{P}$ 中所有多项式在复数域上的公共零点构成的集合, 而用 $\mathrm{Zero}(\mathcal{P}/\mathcal{Q})$ 表示使得 $\mathcal{Q}$ 中任意多项式都不为零的 $\mathrm{Zero}(\mathcal{P})$ 中的元素构成的子集. 任意多元多项式 $F \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] \setminus \mathbb{R}$ 均可视为关于其首变元 $\mathrm{lv}(F)$ 的一元多项式. 记号 $\mathrm{ini}(F)$ 表示 $F$ 的初式 (initial), 即 $F$ 被视为一元多项式时其首项的系数. 对任意多项式集合 $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$, 记 $\mathrm{ini}(\mathcal{P}) = \{\mathrm{ini}(P) \mid P \in \mathcal{P}\}$.

对给定的多项式集合 $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$, 均存在算法将 $\mathcal{P}$ 分解为有限个良好三角列 (fine triangular set)、正则列 (regular set) 或者简单列 (simple set) $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_k$, 使得

$$\mathrm{Zero}(\mathcal{P}) = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Zero}(\mathcal{T}_i / \mathrm{ini}(\mathcal{T}_i)).$$

很多学者在这方面做了大量的研究工作, 包括文献 [15∼26] 等. 此外, Wang 提出的三角系统概念 [27∼29] 可以视为三角列概念的推广. 与以上算法相对应, Wang 给出的算法可将多项式系统 $[\mathcal{P}, \mathcal{Q}]$ 分解为有限个良好三角系统 (fine triangular system)、正则系统 (regular system) 或者简单系统 (simple system)

$[\mathcal{T}_1, \mathcal{S}_1], \ldots, [\mathcal{T}_k, \mathcal{S}_k]$, 使得

$$\mathrm{Zero}(\mathcal{P}/\mathcal{Q}) = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Zero}(\mathcal{T}_i/\mathcal{S}_i).$$

将这些算法统称为三角分解算法 (triangular decomposition algorithm).

吴特征列算法 [25] 就是一种著名的三角分解算法, 在初等几何定理的自动证明领域得到了广泛的应用. 例如, 对多项式集合 $\mathcal{P} = [xy^2 + z^2, xz + y]$ 使用吴特征列算法, 在变元序 $x < y < z$ 下可将 $\mathcal{P}$ 分解为

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}_1 = [(x^3+1)y^2, xz+y], \quad \mathcal{T}_2 = [x^2 - x + 1, xz + y], \\ &\mathcal{T}_3 = [x+1, z-y], \quad \mathcal{T}_4 = [x, y, z^2]. \end{aligned}$$

在实际计算中, 三角分解算法输出的三角列往往为拟线性的. 例如, 以上列出的吴特征列算法的输出中 $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ 和 $\mathcal{T}_3$ 均为拟线性三角列, 只有 $\mathcal{T}_4$ 不是. 分析拟线性三角列的零点个数非常容易, 仅需计算其第一个多项式的零点个数即可. 此外, 我们称三角系统 $[\mathcal{T}, \mathcal{S}]$ 为拟线性的, 如果 $\mathcal{T}$ 为拟线性三角列. 下面用 $\mathbb{Q}$ 表示有理数域.

**定理3** [8]　设 $\mathcal{T} = [T_1(\boldsymbol{u}, x_1), \ldots, T_r(\boldsymbol{u}, x_1, \ldots, x_r)]$ 为正则列, 其中多项式的系数均为有理数. 对随机选择的 $r-1$ 个整数 $c_2, \ldots, c_r$, 构造多项式集合 $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}|_{x_1 = x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_r x_r}$. 若变元序仍为 $x_1 < \cdots < x_r$, 则在超越扩域 $\mathbb{Q}(\boldsymbol{u})$ 上 $\mathcal{T}^*$ 能概率为 1 地被分解为有限个拟线性三角列 $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_k$, 使得

$$\mathrm{Zero}(\mathcal{T}^*) = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Zero}(\mathcal{T}_i/\,\mathrm{ini}(\mathcal{T}_i)).$$

以上定理指出任意有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的正则列能概率为 1 地通过随机整系数线性变换转化为拟线性三角列. 对于正则系统, 也有类似的结论. 因此理论上, 我们可以使用线性变换将任意多项式集合 (多项式系统) 分解为拟线性三角列 (拟线性三角系统).

设 $F, G \in \mathbb{R}[x_1]$ 为一元多项式. 用 $\mathrm{res}(F, G)$ 表示 $F$ 和 $G$ 的 Sylvester 结式 (Sylvester resultant). 定义 $F$ 的判别式 (discriminant) $\mathrm{discr}(F)$ 等于 $\mathrm{res}(F, F')$, 其中 $F'$ 为 $F$ 关于 $x_1$ 的导数. 考虑一元半代数系统

$$\mathbb{S} = \begin{cases} P(\boldsymbol{u}, x_1) = \sum_{i=0}^{m} a_i(\boldsymbol{u})\, x_1^i = 0, \\ Q_1(\boldsymbol{u}, x_1) > 0, \ldots, Q_s(\boldsymbol{u}, x_1) > 0, \end{cases}$$

其中 $x_1$ 为系统唯一的变元, $\boldsymbol{u}$ 为参数. 我们称 $a_m(\boldsymbol{u}) \cdot \mathrm{discr}(P) \cdot \prod_{i=1}^{s} \mathrm{res}(P, Q_i)$ 为 $\mathbb{S}$ 的边界多项式 (border polynomial), 记为 $\mathrm{BP}(\mathbb{S})$. 以上边界多项式的定义与 Yang 等在文献 [30] 中给出的定义类似, 区别在于以上定义只对一元半代数系统给出, 更容易理解.

**定理4** [8]　对于一元半代数系统 $\mathbb{S}$, 边界多项式 $\mathrm{BP}(\mathbb{S})$ 的实零点将参数空间划分为多个连通区域, 在每个连通区域中 $\mathbb{S}$ 的互异实解个数保持不变.

### 3.2　无参数半代数系统

先考虑半代数系统 (1) 不含参数 $\boldsymbol{u}$ 的简单情形. 如果 (1) 中存在 $P \geqslant 0$ 类型的不等式约束, 显然

可以将其分裂为 $P=0$ 与 $P>0$. 因此, 只需考虑以下形式的半代数系统即可:

$$\begin{cases} F_1(\boldsymbol{x})=0,\ldots,F_n(\boldsymbol{x})=0, \\ N_1(\boldsymbol{x})\neq 0,\ldots,N_s(\boldsymbol{x})\neq 0, \\ P_1(\boldsymbol{x})>0,\ldots,P_t(\boldsymbol{x})>0, \end{cases} \tag{5}$$

其中 $F_i$, $N_j$ 和 $P_l$ 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的多项式.

**输入**: 无参数半代数系统 (5).

**输出**: 系统 (5) 的互异实解个数.

**第 1 步.** 令 $\mathcal{F}=\{F_1,\ldots,F_n\}$ 以及 $\mathcal{N}=\{N_1,\ldots,N_s\}$. 利用三角分解算法将多项式系统 $[\mathcal{F},\mathcal{N}]$ 分解为有限个三角系统 $[\mathcal{T}_1,\mathcal{S}_1],\ldots,[\mathcal{T}_k,\mathcal{S}_k]$, 使得

(a) $\mathrm{Zero}(\mathcal{F}/\mathcal{N})=\bigcup_{i=1}^{k}\mathrm{Zero}(\mathcal{T}_i/\mathcal{S}_i)$, 且

(b) 对于任意 $i\neq j$, 都有 $\mathrm{Zero}(\mathcal{T}_i/\mathcal{S}_i)\cap\mathrm{Zero}(\mathcal{T}_j/\mathcal{S}_j)=\emptyset$.

这里给出条件 (b) 是为了方便后面互异实解个数的计算, 可利用文献 [28,31] 中的技巧使这一条件得到满足. 不失一般性, 可假设所有的 $[\mathcal{T}_i,\mathcal{S}_i]$ 均为拟线性的, 否则我们可根据定理 3 利用随机选择的整系数线性变换将其转化为拟线性三角系统. 于是, 问题变为计算 $\mathrm{Zero}(\mathcal{T}_i/\mathcal{S}_i)$ 中满足不等式 $P_l>0$, $l=1,\ldots,t$ 的互异实零点的个数.

**第 2 步.** 对 $i=1,\ldots,k$, 我们设 $\mathcal{T}_i=[T_{i1}(x_1),\ldots,T_{in}(x_1,\ldots,x_n)]$, 并令 $S_i$ 为 $\mathcal{S}_i$ 中所有多项式的乘积. 按次序 $j=n,\ldots,2$, 从方程 $T_{ij}=0$ 中依次求解 $x_j$, 并将解代入 $S_i$ 和 $P_l$, 得到有理函数 $A_i/A_i'$ 和 $B_{il}/B_{il}'$, 其中 $A_i,A_i',B_{il},B_{il}'$ 均为关于变元 $x_1$ 的一元多项式. 故问题转化为计算以下一元半代数系统的互异实解个数:

$$\begin{cases} T_{i1}=0, \\ A_i\neq 0, \\ B_{il}^*=B_{il}\cdot B_{il}'>0,\quad l=1,\ldots,t. \end{cases} \tag{6}$$

**第 3 步.** 系统 (6) 可以进一步简化. 例如, 可以丢掉 $T_{i1}$ 中 $A_i$ 和 $B_{il}^*$ 的因子, 即令 $T_{i1}'=T_{i1}/\deg(T_{i1},A_i)$ 以及 $T_{i1}''=T_{i1}'/\deg(T_{i1}',\prod_{l=1}^{t}B_{il}^*)$. 此外, $B_{il}^*$ 还可以用 $C_{il}=\mathrm{rem}(B_{il}^*,T_{i1}'')$[4] 进行替换. 从而对任意 $i=1,\ldots,k$, 我们得到等价的半代数系统

$$\{T_{i1}''(x_1)=0,\quad C_{il}(x_1)>0,\quad l=1,\ldots,t\}. \tag{7}$$

**第 4 步.** 对每个 $i=1,\ldots,k$ 使用改进的 Uspensky 算法 [32], 将系统 (7) 中 $C_{il}$ 的互异实零点用闭区间 $[a_{i1},b_{i1}],\ldots,[a_{im},b_{im}]$ 进行隔离, 使下列条件满足

- $a_{i\alpha}$, $b_{i\alpha}$, $\alpha=1,\ldots,m$ 均为有理数,
- $a_{i1}\leqslant b_{i1}<a_{i2}\leqslant b_{i2}<\cdots<a_{im}\leqslant b_{im}$,
- 对任意 $\alpha\neq\beta$, $[a_{i\alpha},b_{i\alpha}]\cap[a_{i\beta},b_{i\beta}]=\emptyset$,
- 每个 $[a_{i\alpha},b_{i\alpha}]$ 包含一个且仅包含一个 $C_{il}$ 的实零点,
- 每个 $[a_{i\alpha},b_{i\alpha}]$ 不包含 $T_{i1}''$ 的任意零点.

4) 这里 $\mathrm{rem}(B_{il}^*,T_{i1}'')$ 为 $B_{il}^*$ 除 $T_{i1}''$ 所得的余式.

因为 $C_{il}$ 与 $T''_{i1}$ 互素, 没有公共零点, 所以只要隔离区间足够小, 最后一条总能满足.

**第 5 步.** 容易看出在 $(-\infty, a_{i1}), (b_{i1}, a_{i2}), \ldots (b_{im}, +\infty)$ 中的任意一个给定的开区间上, 多项式 $C_{il}$ 的符号是确定不变的, 可以通过选取样本点并判定样本点处 $C_{il}$ 的符号来确定. 从以上开区间中选取使得所有 $C_{il}, l = 1, \ldots, t$ 为正的区间, 并利用 Sturm 定理计算 $T''_{i1}$ 在这些区间上的互异实解个数, 将得到的数目相加并记为 $r_i$. 返回 $\sum_{i=1}^{k} r_i$ 即可.

以上算法的终止性是显然的, 而正确性已经在算法描述的过程中进行了解释.

### 3.3　带参数的半代数系统

如果半代数系统 (1) 含有参数 $\boldsymbol{u}$ (设参数的个数为 $d$), 不妨将 (1) 重写为如下形式:

$$\begin{cases} F_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = 0, \ldots, F_n(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = 0, \\ N_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) \neq 0, \ldots, N_m(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) \neq 0, \\ P_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) > 0, \ldots, P_s(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) > 0, \\ P_{s+1}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0, \ldots, P_{s+t}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0, \end{cases} \tag{8}$$

其中 $F_i$, $N_j$ 和 $P_l$ 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的多项式. 此时考虑的问题与无参数情形不同: 对于任意给定的非负整数 $\lambda$, 计算半代数系统 (8) 有 $\lambda$ 个互异实解时参数 $\boldsymbol{u}$ 满足的充要条件. 这个问题被称为半代数系统的实解分类问题 (real solution classification problem).

Yang 等在文献 [30, 33] 中基于三角分解给出了求解半代数系统实际分类问题的一般方法. 本小节给出的实解分类方法与 Yang 等的方法没有本质的区别. 我们算法的基本想法是利用线性变换将系统 (8) 转化为等价的一元半代数系统, 然后利用一元系统的边界多项式对参数空间 $\mathbb{R}^d$ 进行划分, 最后选取样本点并利用上一小节给出的算法确定系统有 $\lambda$ 个互异实解时参数 $\boldsymbol{u}$ 所在的区域. 细节的差别在于我们的方法需要先将多项式系统分解为拟线性三角系统, 而拟线性化的计算可能耗费更多时间. Yang 等的方法避开了拟线性化步骤. 然而, 在实际的经济模型分析中, 绝大部分模型对应的多项式系统经过一次三角分解所得的结果已经为拟线性的. 因此从实际使用的角度来看, 我们的算法不会因为拟线性化而增加太多的计算负担, 并且我们的算法的步骤更容易理解、更易于分析. 本小节所给算法的设计思想源于 Kubler 和 Schmedders 的工作 [3, 4].

Lazard 和 Rouillier 在文献 [34] 中给出了基于 Gröbner 基计算的判别式代数簇算法. 此算法也可以用于半代数系统实解分类问题的高效求解. 此外, 量词消去方法也可以用于求解实解分类问题.

下面给出基于拟线性化的实解分类算法的基本步骤.

**输入**: 参数半代数系统 (8) 和非负整数 $\lambda$.

**输出**: 关于参数的有理系数多项式 $A, B \in \mathbb{Q}[\boldsymbol{u}]$ 和参数空间中有限个点组成的集合 $\Delta$ 使得, 当 $A \neq 0$ 时, 系统 (8) 有 $\lambda$ 个互异实解当且仅当 $\Delta$ 中至少有一点与所取参数值在 $B = 0$ 确定的同一连通区域内.

**第 1 步.** 令 $\mathcal{F} = [F_1, \ldots, F_n], \mathcal{N} = [N_1, \ldots, N_m]$. 在 $\mathbb{Q}(\boldsymbol{u})$ 上, 将多项式系统 $[\mathcal{F}, \mathcal{N}]$ 分解为有限个正则系统 $[\mathcal{T}_1, \mathcal{S}_1], \ldots, [\mathcal{T}_k, \mathcal{S}_k]$, 使得

$$\mathrm{Zero}(\mathcal{F}/\mathcal{N}) = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Zero}(\mathcal{T}_i/\mathcal{S}_i).$$

不失一般性, 可设对所有 $i=1,\dots,k$ 都有 $\mathcal{T}_i,\mathcal{S}_i\in\mathbb{Q}[\boldsymbol{u}][\boldsymbol{x}]$, 并且不同分支的零点集 $\mathrm{Zero}(\mathcal{T}_i/\mathcal{S}_i)$ 不相交. 此外, 假设对所有 $i=1,\dots,k$, $[\mathcal{T}_i,\mathcal{S}_i]$ 均为拟线性的, 否则我们可以利用定理 3 通过适当的线性变换将其转化为拟线性三角系统.

**第 2 步.** 对 $i=1,\dots,k$, 我们设 $\mathcal{T}_i=[T_{i1}(\boldsymbol{u},x_1),\dots,T_{in}(\boldsymbol{u},x_1,\dots,x_n)]$, 并令 $S_i$ 为 $\mathcal{S}_i$ 中所有多项式的乘积. 由正则系统的定义易知 $S_i\in\mathbb{Q}[\boldsymbol{u}]$. 按顺序 $j=n,\dots,2$, 从方程 $T_{ij}=0$ 中依次求解出 $x_j$, 并将结果代入 $P_l$, $l=1,\dots,s+t$. 假设得到有理函数 $A_{il}/A'_{il}$, $l=1,\dots,s+t$, 其中 $A_{il}$ 和 $A'_{il}$ 为关于变元 $x_1$ 的、带参数的多项式. 根据正则系统及结式的性质, 当 $S_i\neq 0$ 且 $\mathrm{res}(A_{il},T_{i1})\neq 0$ 时, 问题转化为以下一元半代数系统的实解分类问题:

$$\mathbb{U}_i=\begin{cases}T_{i1}=0,\\ A_{il}\cdot A'_{il}>0,\quad l=1,\dots,s+t.\end{cases}$$

**第 3 步.** 对每个 $i=1,\dots,k$, 构造边界多项式 $\mathrm{BP}(\mathbb{U}_i)$, 它的实零点将参数空间 $\mathbb{R}^d$ 分割为多个连通区域. 由定理 4 可知, 在每个连通区域上半代数系统 $\mathbb{U}_i$ 的互异实解个数不变. 令

$$A_i=S_i\cdot\mathrm{BP}(\mathbb{U}_i)\cdot\prod_{l=1}^{s+t}\mathrm{res}(A_{il},T_{i1}),\quad i=1,\dots,k,\quad B=\prod_{i=1}^{k}\mathrm{BP}(\mathbb{U}_i).$$

故当 $A_1\neq 0,\dots,A_k\neq 0$ 时, 由 $B=0$ 确定的每个连通区域上系统 (8) 的互异实解个数不变. 于是运用柱形代数分解算法 [35], 从 $B=0$ 确定的每个连通区域中选取至少一个样本点. 记这些样本点构成的集合为 $\Delta'$.

**第 4 步.** 利用第 3.2 小节给出的算法, 确定所有 $\mathbb{U}_i$ 在 $\Delta'$ 中每一点处的互异实解个数, 并求和得到半代数系统 (8) 在 $\Delta'$ 中每一点处的互异实解个数. 需要注意, 参数 $\boldsymbol{u}$ 在每个样本点处取值后 $\mathbb{U}_i$ 为一元的、仅含一个等式的无参数半代数系统, 其形式与 (7) 一致, 所以只需用到第 3.2 小节中算法的第 4 和 5 步即可. 将互异实解个数为 $\lambda$ 的 $\Delta'$ 中的样本点放入集合 $\Delta$. 最后返回 $A=\prod_{i=1}^{k}A_i$, $B$ 以及 $\Delta$ 即可.

以上算法的终止性是显然的, 而正确性实际上已经在算法描述的过程中进行了说明.

## 4 算法应用

运用上一节给出的算法, 我们对两个具体的静态均衡模型以及两个动态均衡模型进行计算分析. 所得的结果验证了原有的经济学理论的正确性并发现了一些有意思的新结论, 这显示了本文方法的有效性.

### 4.1 Arrow–Debreu 交换经济模型

先考虑一个简单的 Arrow–Debreu 交换经济模型. Kubler 和 Schmedders 在文献 [4] 中也对该模型进行了研究. 我们用这个模型来解释静态均衡模型到半代数系统的转化过程以及 3.3 小节中描述的算法的各个步骤.

假设有两个代理人和两种商品. 代理人 1 和 2 的效用函数分别为

$$u_1(c_1,c_2)=-\frac{64}{2\,c_1^2}-\frac{1}{2\,c_2^2},\quad u_2(c_1,c_2)=-\frac{1}{2\,c_1^2}-\frac{64}{2\,c_2^2}.$$

并设代理人 1 和 2 的禀赋分别为 $\boldsymbol{e}_1 = (e_{11}, e_{12})$ 和 $\boldsymbol{e}_2 = (e_{21}, e_{22})$, 其中

$$e_{11} = 1 - e, \quad e_{12} = e, \quad e_{21} = e, \quad e_{22} = 1 - e,$$

而 $e \in [0,1]$ 视为模型的参数.

我们用 $p_1$, $p_2$ 表示两种商品的价格, 用 $c_{11}$, $c_{12}$ 记录代理人 1 对两种商品的消费量, 而用 $c_{21}$, $c_{22}$ 记录代理人 2 对两种商品的消费量. 此交换模型的竞争均衡点为使得下列条件成立的商品价格和消费量 $(p_1, p_2, c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22})$:

(a) $(c_{11}, c_{12}) \in \arg\max u_1(c_{11}^*, c_{12}^*)$, 其中 $c_{11}^* \geqslant 0$, $c_{12}^* \geqslant 0$, $p_1 e_{11} + p_2 e_{12} \leqslant p_1 c_{11}^* + p_2 c_{12}^*$,

(b) $(c_{21}, c_{22}) \in \arg\max u_2(c_{21}^*, c_{22}^*)$, 其中 $c_{21}^* \geqslant 0$, $c_{22}^* \geqslant 0$, $p_1 e_{21} + p_2 e_{22} \leqslant p_1 c_{21}^* + p_2 c_{22}^*$,

(c) $e_{11} + e_{21} = c_{11} + c_{21}$,

(d) $e_{12} + e_{22} = c_{12} + c_{22}$.

条件 (a) 中的不等式 $p_1 e_{11} + p_2 e_{12} \leqslant p_1 c_{11}^* + p_2 c_{12}^*$ 描述了代理人 1 的预算限制, 而条件 (c) 和 (d) 意味着市场出清.

利用一阶条件, 竞争均衡点可用下列方程的实解进行刻画:

$$\begin{cases} 64/c_{11}^3 - \lambda_1 p_1 = 0, \\ 1/c_{12}^3 - \lambda_1 p_2 = 0, \\ p_1 e_{11} + p_2 e_{12} - p_1 c_{11} + p_2 c_{12} = 0, \\ 1/c_{21}^3 - \lambda_2 p_1 = 0, \\ 64/c_{22}^3 - \lambda_2 p_2 = 0, \\ p_1 e_{21} + p_2 e_{22} - p_1 c_{21} + p_2 c_{22} = 0, \\ e_{11} + e_{21} - c_{11} + c_{21} = 0, \\ e_{12} + e_{22} - c_{12} + c_{22} = 0, \end{cases}$$

其中 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 为引入的 Lagrange 乘子. 令 $p_1 = 1$ 将价格规范化, 这样可以消去 Lagrange 乘子, 并且可以省去代理人 2 的预算方程

$$p_1 e_{21} + p_2 e_{22} - p_1 c_{21} + p_2 c_{22} = 0.$$

此外, 市场出清方程可用于消去代理人 2 的消费变量 $c_{21}, c_{22}$. 我们设 $x_1 = c_{11} - e_{11}$, $x_2 = c_{12} - e_{12}$, 分别表示代理人 1 对两种商品的超额需求, 并令 $q^3 = p_2$. 结合各个变元和参数的实际意义, 多均衡检测问题转化为确定以下半代数系统有多于一个互异实解时参数 $e$ 满足的条件:

$$\begin{cases} (1 - e + x_1) - 4(e + x_2)q = 0, \\ 4(e - x_1) - (1 - e - x_2)q = 0, \\ x_1 + x_2 q^3 = 0, \\ 0 < q, \quad 0 \leqslant e, \quad 0 \leqslant 1 - e, \\ 0 \leqslant x_1 + 1 - e, \quad 0 \leqslant x_2 + e, \end{cases}$$

其中不等式约束 $0 \leqslant x_1 + 1 - e$, $0 \leqslant x_2 + e$ 由 $c_{11} = x_1 + 1 - e$, $c_{12} = x_2 + e$ 以及 $c_{11} \geqslant 0$, $c_{12} \geqslant 0$ 推得.

下面运用 3.3 小节的算法计算以上半代数系统有 $\lambda=2$ 个互异实解时参数 $e$ 满足的条件. 与算法描述相对应, 我们将计算过程也分为 4 步进行详细解释.

**第 1 步.** 设变元序为 $x_1<x_2<q$. 令

$$\mathcal{F}=[(1-e+x_1)-4(e+x_2)q,\ 4(e-x_1)-(1-e-x_2)q,\ x_1+x_2q^3].$$

在 $\mathbb{Q}(e)$ 上, 利用三角分解算法将 $[\mathcal{F},\emptyset]$ 分解为正则系统, 所得的结果为 $[\mathcal{T},\mathcal{S}]=[[T_1,T_2,T_3],\emptyset]$, 其中

$$\begin{aligned}T_1&=-3375\,ex_1^3-225\,x_1^3+10125\,e^2x_1^2+1350\,ex_1^2-195\,x_1^2-10125\,e^3x_1\\&\quad-2025\,e^2x_1+345\,ex_1-35\,x_1+3375\,e^4+900\,e^3-150\,e^2-28\,e-1,\\T_2&=-15\,x_1x_2+15\,ex_2+x_2-15\,ex_1-x_1+15\,e^2+2\,e-1,\\T_3&=x_2q+eq-q-4\,x_1+4\,e.\end{aligned}$$

显然 $[\mathcal{T},\mathcal{S}]$ 已经为拟线性三角系统, 不需要再对其进行拟线性化了.

**第 2 步.** 令 $\mathcal{P}=[q,e,1-e,x_1+1-e,x_2+e]$. 由 $T_3=0$ 解出 $q$ 并由 $T_2=0$ 解出 $x_2$, 得

$$q=-\frac{4(e-x_1)}{-1+e+x_2},\quad x_2=-\frac{-1+2\,e-x_1+15\,e^2-15\,x_1e}{1+15\,e-15\,x_1},$$

并依次代入 $\mathcal{P}$ 得到集合

$$\mathcal{P}'=\Big[\frac{1+15\,e-15\,x_1}{4},\ e,\ 1-e,\ x_1+1-e,\ -\frac{-1+e-x_1}{1+15\,e-15\,x_1}\Big].$$

将以上有理分式的分子与 $T_1$ 做结式并将结果相乘可得

$$C=-58982400\,(1+15\,e)e^3(e-1)^3(63\,e+1)^2.$$

当 $C\neq 0$ 时, $\mathcal{P}'$ 中的分式与 $T_1$ 没有公共零点. 此时, 只需考虑 $\mathcal{P}'$ 中的式子严格大于 0 的情形即可. 为了便于处理, 我们将 $\mathcal{P}'$ 转化为等价的多项式集合 $\mathcal{P}^*=[P_1,\dots,P_5]$, 其中

$$\begin{aligned}&P_1=4(1+15\,e-15\,x_1),\quad P_2=e,\quad P_3=1-e,\quad P_4=x_1+1-e,\\&P_5=-(-1+e-x_1)(1+15\,e-15\,x_1).\end{aligned}$$

于是, 问题转化为计算简单半代数系统 $\mathbb{U}=\{T_1=0,\ P_1>0,\dots,P_5>0\}$ 的互异实解个数.

**第 3 步.** 构造 $\mathbb{U}$ 的边界多项式

$$B=-1268067619307520000000000\,(1+15\,e)^4(3\,e+1)(45\,e-1)^3e^3(e-1)^3(63\,e+1)^2.$$

多项式 $B$ 的实零点将参数空间 $[0,1]$ 划分为两个区间, 利用柱形代数分解算法从这两个区间各选取一个样本点组成集合 $\Delta'=\{1/64,1/2\}$.

**第 4 步.** 确定 $\mathbb{U}$ 在 $\Delta'$ 中每一点处的互异实解个数. 例如, 在样本点 1/64 处,

$$\mathbb{U}|_{e=1/64}=\begin{cases}-\dfrac{17775}{64}x_1^3-\dfrac{702195}{4096}x_1^2-\dfrac{7901645}{262144}x_1-\dfrac{24670673}{16777216}=0,\\-60\,x_1+\dfrac{79}{16}>0,\ \dfrac{1}{64}>0,\ \dfrac{63}{64}>0,\ x_1+\dfrac{63}{64},\\\Big(x_1+\dfrac{63}{64}\Big)\Big(\dfrac{79}{64}-15\,x_1\Big)>0.\end{cases}$$

我们可用 3.2 小节的算法计算以上无参数半代数系统的互异实解个数, 所得结果为 3. 同理, 可获得 $\mathbb{U}$ 在样本点 1/2 处的互异实解个数为 1. 令 $A = BC$. 由定理 4 可知, 当 $A \neq 0$ 时, Arrow–Debreu 交换经济模型有 $\lambda = 2$ 个均衡点当且仅当参数 $e$ 的取值与样本点 1/64 位于 $B = 0$ 所划分的同一区间. 于是, 算法返回 $A, B, \Delta = \{1/64\}$.

容易验证样本点 1/64 所在的区间为 $(0, 1/54)$. 考虑区间的端点, 可得 Arrow–Debreu 交换经济模型在条件 $A \neq 0$ 下有 $\lambda = 2$ 个均衡点的显式充要条件为 $0 \leqslant e < 1/54$. 在建模选择参数 $e$ 时, 务必确保其满足 $1/54 \leqslant e \leqslant 1$ 使经济系统只有唯一的均衡点, 以便我们可以运用比较静态等常用经济学工具进行模型分析. 一般来说, 要获得半代数系统具有给定个数互异实解的显式充要条件是非常困难的. 但 Yang 等指出这些显式条件可以通过计算所谓的广义判别式序列 (generalized discriminant list) 来确定, 有关细节可参考文献 [30]. 在算法实现中, 我们采用了 Yang 等给出的技巧, 以获得对半代数经济模型进行计算分析的显式理论结果.

### 4.2　跨期叠代模型

跨期叠代模型 (overlapping generations model) 简称 OLG 模型, 在宏观经济、货币理论、财政政策和社会保险等领域应用广泛, 已成为现代经济学主流的模型工具之一. 本节考虑跨期叠代模型中的一种, 双向无限模型 (double-ended infinity model). Kehoe 等 [36], Geanakoplos [37], Kubler 和 Schmedders [4] 等先后对该模型进行过系统的研究.

在该模型中, 时间取从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的离散值, 即 $t \in \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. 在每一时刻 $t \in \mathbb{Z}$ 均有一个代理人出生, 该代理人可以生存 $N$ 个周期, 他在各个周期获得的禀赋设为 $e_1, \dots, e_N$. 在 $t$ 时刻出生的代理人的效用函数为 $U_t = \sum_{i=1}^{N} u(c_i(t))$, 其中 $c_i(t)$ 为该代理人在第 $i$ 个周期的消费量, $u(c_i(t))$ 表示消费 $c_i(t)$ 所产生的效用. 在应用经济学研究中, 通常假设

$$u(c) = \begin{cases} \dfrac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}, & \text{当 } 1 \neq \sigma > 0, \\ \ln c, & \text{当 } \sigma = 1. \end{cases}$$

假设 $p_t$ 为商品在 $t$ 时刻的价格. 我们将双向无限模型的均衡点定义为使市场出清, 即

$$\sum_{i=1}^{N} (c_i(t) - e_i) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

以及满足预算限制

$$\sum_{i=1}^{N} p_{t+i-1}(c_i(t) - e_i) \leqslant 0, \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

并且使得效用 $U_t$ 最大化的商品价格与消费量组成的向量 $\big(p_t, c_1(t), \dots, c_N(t)\big)$, $t \in \mathbb{Z}$.

显然, 上述有无穷个变量的系统无法求解. 为使问题可解, 我们增加条件:

- 假设实际利率为常数, 即对任意 $t \in \mathbb{Z}$ 都有 $p_{t+1}/p_t = q > 0$;
- 假设每个代理人都有同样的消费习惯, 即对任意 $t \in \mathbb{Z}$ 都有 $c_i(t) = c_i$.

满足以上两个条件的均衡点被称为稳态均衡点 (stationary equilibrium). 计算稳态均衡点的问题等价于求解方程组

$$\begin{cases} q c_{i+1}^{\sigma} - c_i^{\sigma} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ \sum_{i=1}^{N} q^{i-1}(c_i - e_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^{N} (c_i - e_i) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

容易看出, 以上方程组恒有解 $q=1$, $c_i=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}e_i$, $i=1,\dots,N$. 可以证明该解为 Pareto 有效的, 称为模型的黄金律解 (golden rule solution). 当均衡点为黄金律解时, 市场的实际利率为 0 而代理人对一生中所获得的禀赋均分到每个生存周期进行消费.

我们的问题是双向无限模型黄金律解之外的稳态均衡点是否存在, 若存在是否唯一. 1991 年, Kehoe 等 [36] 证明了当 $\sigma=1$ 时, 双向无限模型除去黄金律解的稳态均衡点, 如果存在必是唯一的. 另外, 针对模型 $\sigma=2$ 的情形, Kubler 和 Schmedders [4] 也指出除去黄金律解的稳态均衡点, 如果存在必唯一. 当 $\sigma>2$ 时, 模型稳态均衡点的个数又如何呢? 作为示例, 下面我们利用本文的算法对 $\sigma=3$ 和 $N=3$ 时双向无限模型的稳态均衡点进行分类.

为使计算更简单, 我们对方程组 (9) 稍作变形, 令 $w=q^{1/\sigma}$ 并设 $x_i=c_i-e_i$, $i=1,2,3$. 结合参数和变元的经济学含义, 可得半代数系统

$$\begin{cases}(e_2+x_2)w-(e_1+x_1)=0,\\(e_3+x_3)w-(e_2-x_2)=0,\\x_1+w^3x_2+w^6x_3=0,\\x_1+x_2+x_3=0,\\w-1\neq 0,\\w>0,\quad e_1\geqslant 0,\quad e_2\geqslant 0,\quad e_3\geqslant 0,\\e_1+x_1\geqslant 0,\quad e_2+x_2\geqslant 0,\quad e_3+x_3\geqslant 0,\end{cases}\tag{10}$$

其中 $e_1,e_2,e_3$ 为系统的参数. 添加不等式约束 $w-1\neq 0$ 是为了排除黄金律解, 而假定 $e_i+x_i\geqslant 0$ 是因为消费量 $c_i\geqslant 0$.

设变元序为 $x_1<x_2<x_3<w$. 设 $\mathcal{F}$ 为半代数系统 (10) 中等式部分的多形式组成的集合, 并令 $\mathcal{N}=\{w-1\}$. 应用三角分解算法对多项式系统 $[\mathcal{F},\mathcal{N}]$ 进行正则分解, 结果为一个拟线性的三角系统 $[[T_1,T_2,T_3,T_4],\emptyset]$, 其中 $T_1$ 为关于变元 $x_1$ 的 7 次多项式. 由于 $T_1,T_2,T_3,T_4$ 比较复杂, 这里不将它们一一列出.

从 $T_4=0$, $T_3=0$ 和 $T_2=0$ 解出 $w$, $x_3$ 和 $x_2$, 并依次代入系统 (10) 的不等式部分, 将 (10) 转化为等价的关于 $x_1$ 的一元半代数系统. 构造该系统的边界多项式 $B$, 这是一个全次数为 294、项数为 28498 的多项式. 算法的输出中多项式 $A$ 比 $B$ 更复杂. 最终的计算结果如下.

当 $A\neq 0$ 时, 半代数系统 (10) 有一个实解当且仅当参数 $(e_1,e_2,e_3)$ 的取值位于下列某个样本点所在的连通区域:

$$\begin{aligned}&(1,1/8,1/512),\quad (1,23/128,1/1024),\quad (1,23/128,1/128),\\&(1,13/64,1/64),\quad (1,1/4,1/32),\quad (1,1,1/2),\quad (1,882,1).\end{aligned}$$

这等价于显式条件

$$e_1^3e_3-3\,e_1^2e_2e_3+3\,e_1^2e_3^2+3\,e_1e_2^2e_3-6\,e_1e_2e_3^2+3\,e_1e_3^3-8\,e_2^4+7\,e_2^3e_3+3\,e_2^2e_3^2-3\,e_2e_3^3+e_3^4<0.\tag{11}$$

而系统 (10) 有两个互异实解当且仅当参数 $(e_1,e_2,e_3)$ 的取值位于下列某个样本点所在的区域:

$$\begin{aligned}&(1,1/8,1/128),\quad (1,23/128,1/64),\quad (1,13/64,3/128),\\&(1,13/64,9/256),\quad (1,1/4,7/128),\quad (1,1,1),\quad (1,882,883).\end{aligned}$$

从算法输出中还可以知道半代数系统 (10) 没有两个以上的互异实解存在. 因此, 当 $\sigma=3$, $N=3$ 时, 双向无限模型除黄金律解之外的稳态均衡点个数只可能为 0, 1, 2. 综合以上结论, 在建立双向无限模型选取效用函数时, 如果 $\sigma=1$ 或 $\sigma=2$, 则我们不用担心黄金律解以外的多个稳态均衡点可能出现. 但是当 $\sigma=3$ 时, 必须小心地选取参数, 使其满足式 (11). 运用以上方法, 可以类似地对 $\sigma>3$ 时双向无限模型的稳态均衡点个数进行分类.

### 4.3 价格搜索过程

价格如何形成是微观经济学研究中的一个重要问题 [38, 39]. 下面, 我们讨论具有 3 个代理人和 3 种商品的竞争交换经济模型的价格形成过程. 假设 3 个代理人的效用函数分别为

$$u_1(c_1,c_2,c_3)=\min(c_2,c_3),\quad u_2(c_1,c_2,c_3)=\min(c_1,c_3),\quad u_3(c_1,c_2,c_3)=\min(c_1,c_2),$$

而其初始禀赋为 $\boldsymbol{e}_j=(e_{1j},e_{2j},e_{3j})$, $j=1,2,3$. 当商品价格 $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,p_3)$ 时, 可以得到 3 种商品的超额需求分别为

$$\begin{aligned}
z_1(\boldsymbol{p})&=\frac{M_2}{p_1+p_3}+\frac{M_3}{p_1+p_2}-\sum_{j=1}^{3}e_{1j},\\
z_2(\boldsymbol{p})&=\frac{M_3}{p_1+p_2}+\frac{M_1}{p_2+p_3}-\sum_{j=1}^{3}e_{2j},\\
z_3(\boldsymbol{p})&=\frac{M_1}{p_2+p_3}+\frac{M_2}{p_1+p_3}-\sum_{j=1}^{3}e_{3j},
\end{aligned}$$

其中 $M_j=\sum_{i=1}^3 p_ie_{ij}$ 为代理人 $j$ 的收入. 当商品的超额需求为正时, 需求大于供给, 该商品的价格上升; 反之, 商品的超额需求为负时, 需求小于供给, 该商品的价格下降. 于是, 我们将价格搜索过程 (price tâtonnement process) 简单地定义为 $\mathrm{d}p_i/\mathrm{d}t=z_i(\boldsymbol{p})$, $i=1,2,3$, 其中 $t$ 表示时间.

目前关于价格搜索过程的最重要的一般性结论 [40] 为: 价格搜索过程全局稳定的充分条件是所有商品均为总替代品, 即对于所有的 $k\neq j$ 都有 $\partial z_j/\partial p_k(\boldsymbol{p})>0$. 但这一严苛的条件在大多数情况下是不满足的. 例如, Scarf [41] 讨论了 $\boldsymbol{e}_1=(0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,0,1)$, $\boldsymbol{e}_3=(1,0,0)$ 的特殊情形, 并证明了此时模型的唯一均衡点 $\boldsymbol{p}=(1,1,1)$ 不是全局稳定的. 准确地说, 当商品初始价格的乘积 $p_1(0)p_2(0)p_3(0)$ 为不等于 1 的常数 $c$ 时, 价格的调整过程将表现为周期解并始终满足 $p_1(t)p_2(t)p_3(t)=c$, 故不可能收敛到均衡点 $\boldsymbol{p}=(1,1,1)$. 于是一个自然的问题便是: 能否给出价格搜索过程稳定的充分必要条件.

下面先考虑初始禀赋对称的情形. 假设当价格 $\boldsymbol{p}=(1,1,1)$ 时 3 个代理人的收入相同均为 1, 即

$$\sum_{i=1}^{3}e_{ij}=1. \tag{12}$$

此外, 假设市场上每种商品的供给量均为一个单位, 即

$$\sum_{j=1}^{3}e_{ij}=1. \tag{13}$$

显然, 以上假设涵盖了 Scarf 所考虑的特殊情形.

我们将商品 3 视为计价物 (numeraire), 即令 $p_3=1$. 此时模型转化为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}=&\frac{p_1(1-e_{11}-e_{12})+p_2(1-e_{21}-e_{22})+e_{11}+e_{21}+e_{12}+e_{22}-1}{p_1+p_2}\\&+\frac{e_{12}p_1+e_{22}p_2-e_{12}-e_{22}+1}{p_1+1}-1,\\\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}=&\frac{p_1(1-e_{11}-e_{12})+p_2(1-e_{21}-e_{22})+e_{11}+e_{21}+e_{12}+e_{22}-1}{p_1+p_2}\\&+\frac{e_{11}p_1+e_{21}p_2-e_{11}-e_{21}+1}{p_2+1}-1,\end{aligned}$$

其中 $p_1,p_2>0$ 为系统的变元, 而 $e_{11},e_{12},e_{21},e_{22}$ 为参数. 根据经济学含义, 对任意 $i=1,2,3$ 和 $j=1,2,3$ 均有 $e_{ij}\geqslant 0$, 并且由式 (12) 以及 (13) 可知

$$\begin{aligned}&e_{11}\geqslant 0,\ e_{12}\geqslant 0,\ e_{21}\geqslant 0,\ e_{22}\geqslant 0,\ 1-e_{11}-e_{12}\geqslant 0,\ 1-e_{21}-e_{22}\geqslant 0,\\&1-e_{11}-e_{21}\geqslant 0,\ 1-e_{12}-e_{22}\geqslant 0,\ e_{11}+e_{21}+e_{12}+e_{22}-1\geqslant 0.\end{aligned}$$

计算实验显示当参数满足以上不等式时, 系统有且仅有一个均衡点. 该均衡点渐进稳定的充要条件为

$$R=4\,e_{11}e_{22}-4\,e_{12}e_{21}+2\,e_{12}+2\,e_{21}-1>0.$$

以上结论与 Hirota 在文献 [42] 中得到的结果相同. 但是 Scarf 所考虑的特殊情形 ($e_{11}=e_{21}=e_{22}=0$, $e_{12}=1$) 满足 $R=1>0$. 因此, 上述条件并非均衡点全局稳定的充要条件. Hirota [42] 利用 Lyapunov 第 2 方法给出了价格搜索过程全局稳定的充要条件:

$$R>0,\ 4\,e_{11}e_{22}>(1-e_{12}-e_{21})^2\quad\text{或}\quad R>0,\ 4\,e_{11}e_{22}=(1-e_{12}-e_{21})^2,\ e_{11}+e_{22}>0.$$

考虑到禀赋非对称的一般情形的计算非常复杂, 本文仅研究一种简单的情况, 即 $\boldsymbol{e}_1=(0,b,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,0,c)$, $\boldsymbol{e}_3=(1,0,0)$, 其中 $b,c\geqslant 0$ 为参数. 同样令 $p_3=1$, 则模型简化为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}&=\frac{bp_1}{p_1+1}+\frac{cp_2}{p_1+p_2}-1,\\\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{p_2+1}+\frac{cp_2}{p_1+p_2}-1.\end{aligned}$$

计算结果显示以上系统可能有最多两个均衡点, 而渐进稳定的均衡点的个数仅可能为一个. 系统有稳定均衡点的充要条件为 $0\leqslant b+c-1$, $bc-c-1<0$, $0\leqslant R^*$, 其中

$$\begin{aligned}R^*=&-b^2c^4+b^3c^2+9\,b^2c^3+2\,bc^4-2\,b^3c-23\,b^2c^2-13\,bc^3\\&-c^4+16\,b^2c+23\,bc^2+4\,c^3-8\,bc-5\,c^2-4\,b+2\,c.\end{aligned}$$

Mukherji 在文献 [43] 中研究了更特殊的、只含一个参数的禀赋非对称模型 (对应于这里 $c=1$ 的情形). 上述计算结果与 Mukherji 给出的结论是一致的, 并且推广了 Mukherji 的结论.

### 4.4 IS-LM 模型

IS-LM 模型 [44] 是现代宏观经济学的主要模型之一. 此模型的均衡由商品市场的均衡以及货币市场的均衡共同建立, 其中商品市场的均衡由 IS 曲线刻画, 而货币市场的均衡由 LM 曲线刻画.

先看商品市场. 我们用 $t$ 表示时间, 用 $y(t)$ 表示实际收入. 假设实际支出 $e$ 等于消费支出 $c$、投资支出 $i$ 与政府支出 $g$ 三者之和, 即 $e(t)=c(y(t))+i(y(t),r(t))+g$, 其中消费支出 $c$ 与实际收入 $y$ 正相关, 投资支出 $i$ 与实际收入 $y$ 正相关而与实际利率 $r$ 负相关, 并规定政府支出 $g$ 为常数不随时间而变化. 商品市场的动态变化可由商品的超额需求来刻画, 即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=e-y=c(y)+i(y,r)+g-y.$$

再看货币市场. 实际货币需求 $m^d(t)=l(y(t),r(t))$ 与实际收入 $y$ 正相关而与实际利率 $r$ 负相关. 我们假设 $m_0>0$ 表示对实际货币的固定供给, 与时间无关. 货币市场的动态变化可由货币的超额需求进行刻画, 即

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=m^d-m_0=l(y,r)-m_0.$$

根据以上模型的描述, 我们假设

$$c(y)=by^2+a,\quad i(y,r)=jy-hr,\quad l(y,r)=\frac{ky^2}{r},\quad a,b,j,h,k>0.$$

由于政府支出 $g$ 与时间无关, 技术上可以将其包含在常数 $a$ 中. 因此, 模型可以省去 $g$, 转化为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=by^2+a+jy-hr-y,\\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}&=\frac{ky^2}{r}-m_0,\end{aligned}\tag{14}$$

其中 $y,r>0$ 为模型的变元, 而 $a,b,j,h,k,m_0>0$ 视为参数.

计算结果显示系统 (14) 最多有两个均衡点, 而渐进稳定的均衡点的个数至多一个. 此外, 系统 (14) 有稳定均衡点的充要条件为

$$\begin{aligned}&R_1<0,\quad R_2<0,\quad R_3<0,\\ &\text{或}\ \ R_1<0,\quad R_2<0,\quad R_3>0,\quad R_4<0,\\ &\text{或}\ \ R_1>0,\quad R_2<0,\quad R_3<0,\quad R_4>0,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}R_1=&j-1,\quad R_2=4\,abm_0-4\,ahk-j^2m_0+2\,jm_0-m_0,\\ R_3=&4\,a^3b^2k^2m_0-a^2bj^2k^2m_0-a^2hj^2k^3-4\,ab^2jkm_0^3+2\,abhjk^2m_0^2+2\,ah^2jk^3m_0+b^3m_0^5\\ &-3\,b^2hkm_0^4+3\,bh^2k^2m_0^3+bj^3km_0^3-h^3k^3m_0^2+hj^3k^2m_0^2+2\,a^2bjk^2m_0+2\,a^2hjk^3\\ &+4\,ab^2km_0^3-2\,abhk^2m_0^2-2\,ah^2k^3m_0-3\,bj^2km_0^3-3\,hj^2k^2m_0^2-a^2bk^2m_0-a^2hk^3\\ &+3\,bjkm_0^3+3\,hjk^2m_0^2-bkm_0^3-hk^2m_0^2,\end{aligned}$$

而 $R_4$ 是一个较复杂的、101 项的多项式. 由于文章篇幅的限制, 这里就不将 $R_4$ 的表达式写出了. 由以上计算结果可知, 在分析实际经济问题时 IS-LM 模型可以放心使用, 不必担心由多个稳定均衡点带来的模型分析困难.

## 5 结论

本文介绍了将半代数静态均衡模型的多均衡检测问题以及动态均衡模型的稳定性分析问题转化为半代数系统实解计数问题的一般方法, 并针对无参数和带参数两种情形分别给出了分析半代数系统实解个数的系统化算法. 算法的基本思想是利用随机选择的线性变换将原半代数系统的等式部分分解为拟线性三角列, 进而将系统转化为等价的一元半代数系统, 最后通过处理这些一元半代数系统得到原系统的互异实解个数.

我们给出的方法可视为对 Kubler 和 Schmedders [3,4] 所给方法的推广. 相比他们的方法, 本文的方法考虑了不等式约束[5], 可以计算模型均衡点的精确个数, 而不仅只给出均衡点个数的上界. 此外, 我们的方法更系统化, 无需人工干预.

当模型参数较多时, 所提算法会因为双指数复杂度的柱形代数分解过程变得极为低效, 基本上无法在合理的时间内输出计算结果. 对于参数较多的应用经济模型, 常考虑另一个问题: 对参数空间的特定区域, 确定半代数经济模型只有唯一的 (稳定) 均衡点的概率. 要解决这个问题, 需要结合半代数系统边界多项式的性质和 Monte Carlo 方法设计全新的高效算法, 这将是我们未来的工作.

**致谢** 感谢 Felix Kubler, Karl Schmedders 和王东明教授与本文作者进行的有益讨论以及提出的宝贵建议.

## 参考文献

1 Mas-Colell A. The Theory of General Economic Equilibrium: A Differentiable Approach. Cambridge: Cambridge University Press, 1990
2 Nachbar J H. General equilibrium comparative statics. Econometrica, 2002, 70: 2065–2074
3 Kubler F, Schmedders K. Competitive equilibria in semi-algebraic economies. J Econ Theory, 2010, 145: 301–330
4 Kubler F, Schmedders K. Tackling multiplicity of equilibria with Gröbner bases. Oper Res, 2010, 58: 1037–1050
5 Datta R. Using computer algebra to find Nash equilibria. In: Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. New York: ACM, 2003. 74–79
6 Datta R. Finding all Nash equilibria of a finite game using polynomial algebra. Econ Theory, 2010, 42: 55–96
7 Judd K L, Renner P, Schmedders K. Finding all pure-strategy equilibria in games with continuous strategies. Quant Econ, 2012, 3: 289–331
8 Li X L, Wang D M. Computing equilibria of semi-algebraic economies using triangular decomposition and real solution classification. J Math Econ, 2014, 54: 48–58
9 Miller R K, Michel A N. Ordinary Differential Equations. London: Academic Press, 1982
10 Benedir M, Picinbono B. Extended table for eliminating the singularities in Routh's array. IEEE Trans Automatic Control, 1990, 35: 218–220
11 Lienard A, Chipart M H. Sur la signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique. J de Mathématiques Pures et Appliquées, 1914, 10: 291–346
12 Li X L, Mou C Q, Niu W, et al. Stability analysis for discrete biological models using algebraic methods. Math Comput Sci, 2011, 5: 247–262
13 Niu W, Wang D M. Algebraic approaches to stability analysis of biological systems. Math Comput Sci, 2008, 1: 507–539
14 Wang D M, Xia B C. Stability analysis of biological systems with real solution classification. In: Proceedings of the 2005 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. New York: ACM, 2005. 354–361
15 Aubry P, Lazard D, Moreno Maza M. On the theories of triangular sets. J Symb Comput, 1999, 28: 105–124

5) 不等式约束在经济模型中广泛存在.

16 Chen C B, Moreno Maza M. Algorithms for computing triangular decompositions of polynomial systems. In: Proceedings of the 36th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. San Jose: ACM, 2011. 83–90

17 Chou S C, Gao X S. Ritt-Wu's decomposition algorithm and geometry theorem proving. In: Proceedings of the 10th International Conference on Automated Deduction. Berlin: Springer-Verlag, 1990. 207–220

18 Gallo G, Mishra B. Efficient algorithms and bounds for Wu-Ritt characteristic sets. In: Mora T, Traverso C, eds. Effective Methods in Algebraic Geometry. Berlin: Birkhauser, 1991. 119–142

19 Hubert E. Notes on triangular sets and triangulation-decomposition algorithms I: polynomial systems. In: Winkler F, Langer U, eds. Symbolic and Numerical Scientific Computation. Berlin: Springer, 2003. 143–158

20 Kalkbrener M. A generalized Euclidean algorithm for computing triangular representations of algebraic varieties. J Symb Comput, 1993, 15: 143–167

21 Lazard D. A new method for solving algebraic systems of positive dimension. Discrete Appl Math, 1991, 33: 147–160

22 Li X L, Mou C Q, Wang D M. Decomposing polynomial sets into simple sets over finite fields: the zero-dimensional case. Comput Math Appl, 2010, 60: 2983–2997

23 Mou C Q, Wang D M, Li X L. Decomposing polynomial sets into simple sets over finite fields: the positive-dimensional case. Theor Comput Sci, 2013, 468: 102–113

24 Wang D M. A strategy for speeding-up the computation of characteristic sets. In: Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 504–510

25 Wu W T. Basic principles of mechanical theorem proving in elementary geometries. J Autom Reasoning, 1986, 2: 221–252

26 Yang L, Zhang J Z. Searching dependency between algebraic equations: an algorithm applied to automated reasoning. In: Johnson J, McKee S, Vella A, eds. Artificial Intelligence in Mathematics. Oxford: Oxford University Press, 1994. 147–156

27 Wang D M. An elimination method for polynomial systems. J Symb Comput, 1993, 16: 83–114

28 Wang D M. Decomposing polynomial systems into simple systems. J Symb Comput, 1998, 25: 295–314

29 Wang D M. Computing triangular systems and regular systems. J Symb Comput, 2000, 30: 221–236

30 Yang L, Hou X R, Xia B C. A complete algorithm for automated discovering of a class of inequality-type theorems. Sci China Ser F-Inf Sci, 2001, 44: 33–49

31 Yang L, Zhang J Z, Hou X R. A criterion of dependency between algebraic equations and its applications. In: Proceedings of the International Workshop on Mathematics Mechanization, Beijing, 1992. 110–134

32 Collins G E, Loos R. Real zeros of polynomials. In: Buchberger B, Collins G E, Loos R, eds. Computer Algebra: Symbolic and Algebraic Computation. New York: Springer, 1983. 83–94

33 Yang L, Xia B C. Real solution classifications of parametric semi-algebraic systems. In: Dolzmann A, Seidl A, Sturm T, eds. Algorithmic Algebra and Logic — Proceedings of the A3L 2005. Norderstedt: Herstellung und Verlag, 2005. 281–289

34 Lazard D, Rouillier F. Solving Parametric Polynomial Systems. INRIA Technical Report RR-5322. 2004

35 Collins G E, Hong H. Partial cylindrical algebraic decomposition for quantifier elimination. J Symb Comput, 1991, 12: 299–328

36 Kehoe T J, Levine D K, Mas-Colell A, et al. Gross substitutability in large-square economies. J Econ Theory, 1991, 54: 1–25

37 Geanakoplos J. Overlapping generations models of general equilibrium. In: Durlauf S N, Blume L E, eds. The New Palgrave Dictionary of Economics. 2nd ed. London: Palgrave Macmillan, 2008

38 Arrow K J, Block H D, Hurwicz L. On the stability of the competitive equilibrium II. Econometrica, 1959, 27: 82–109

39 Arrow K J, Hurwicz L. On the stability of the competitive equilibrium I. Econometrica, 1958, 26: 522–552

40 Arrow K J, Hahn F. General Competitive Analysis. San Francisco: Holden-Day, 1971

41 Scarf H. Some examples of global instability of the competitive equilibrium. Int Econ Rev, 1960, 1: 157–172

42 Hirota M. On the stability of competitive equilibrium and the patterns of initial holdings: an example. Int Econ Rev, 1981, 22: 461–467

43 Mukherji A. Global stability condition on the plane: a general law of demand. J Econ Theory, 2007, 134: 583–592

44 Zhang W B. Differential Equations, Bifurcations, and Chaos in Economics. London: World Scientific, 2005

# Computing equilibria of semi-algebraic economies: an algebraic approach

Xiaoliang LI

*School of Computer Science, Dongguan University of Technology, Dongguan* 523808*, China*
E-mail: xiaoliangbuaa@gmail.com

**Abstract** Semi-algebraic economies are economic models, the equilibria of which could be characterized by semi-algebraic systems. Semi-algebraic economies are usually divided into two classes: static equilibrium models and dynamic equilibrium models. In this paper, we propose general methods to transfer the problems of detecting multiple equilibria in static models and analyzing the stability of equilibria in dynamic models into counting real solutions of semi-algebraic systems. Furthermore, we describe systematic algorithms for computing the number of distinct real solutions of semi-algebraic systems with or without parameters. Compared to the methods by Kubler and Schmedders, ours can better handle models with inequality constraints and can give the precise number of equilibria. The effectiveness of our algorithms is illustrated by the computational results of analyzing a number of specific economic models.

**Keywords** equilibrium, semi-algebraic economy, semi-algebraic system, differential equation, stability, triangular decomposition

**Xiaoliang LI** was born in 1983. He received the Ph.D. degree in Applied Mathematics from Beihang University, Beijing, in 2012. Currently, he is an assistant professor at Dongguan University of Technology. His research interests include triangular decomposition, real solution classification, computational economics, and computational finance.