

高阶逻辑系统的符号动力学方法

宋金利, 李志强*

河南财经政法大学数学与信息科学学院, 郑州 450046

* 通信作者. E-mail: lizhiqiang@amss.ac.cn

收稿日期: 2015-10-15; 接受日期: 2015-12-26; 网络出版日期: 2016-01-22

国家自然科学基金 (批准号: 61203050, 61374079, 11202068)、河南省高等学校青年骨干教师资助计划 (批准号: 2013GGJS-099)、河南省基础与前沿技术研究计划 (批准号: 132300410011) 和河南省高等学校哲学社会科学研究“三重”重大项目(专项) (批准号:2014-SZZD-30) 资助项目

摘要 Artin-Mazur Zeta 函数和拓扑熵是符号动力学中的两大重要工具: Artin-Mazur Zeta 函数包含移位系统中不同周期序列的数目信息; 拓扑熵反映了符号动力系统中序列的增长率信息. 本文以矩阵的半张量积作为工具, 在符号动力学框架下, 研究了高阶逻辑 (控制) 系统的拓扑结构. 首先证明了 k 阶逻辑控制系统的状态空间轨迹集合是 k 步有限型移位系统, 然后用 Artin-Mazur Zeta 函数来研究高阶 Boolean 网络的极限环个数, 利用移位系统的拓扑熵得到高阶 Boolean 控制网络的相关信息. 本文的主要贡献是建立了高阶逻辑动态系统和有限型移位系统的一一对应.

关键词 高阶 Boolean 控制网络 半张量积 符号动力学 Artin-Mazur Zeta 函数 拓扑熵

1 引言

现实世界中的系统主要分为两种: 一种是基于数量关系建立起来的系统, 比如牛顿力学定律中天体运动的动力学方程、电压电流的变化方程等, 这类系统一般都可以用常微分方程、偏微分方程、差分方程等数学工具来描述; 另一种是基于逻辑的系统, 比如在经济学领域里公司之间的经济决策、对弈棋手之间的博弈等, 在这类模型中都要考虑到参与人的逻辑决策. 目前研究比较多的是基于数量关系的系统, 这是因为我们有大量成熟的数学工具可以使用.

系统生物学是近几年的研究热点, 关于基因调控网络的研究模型比较多. 文献 [1,2] 用微分方程作为模型, 其中文献 [2] 利用自治微分方程作为模型研究了基因调节. 另一方面, Kauffman 在文献 [3,4] 中指出采用 Boolean 网络模型研究基因调控网络是比较合理的. N-K Boolean 网络最初由 Kauffman 提出后, 被用来描述刻画基因调控网络, 成为了系统生物学里的研究热点 [5~7], 同时也引起其他研究领域的兴趣. Boolean 网络是一类最简单的逻辑系统, 它的状态变量都只能取值 0 或 1, 各个状态变量之间通过 Boolean 函数相互作用. 其动态演化方程如下:

引用格式: 宋金利, 李志强. 高阶逻辑系统的符号动力学方法. 中国科学: 信息科学, 2016, 46: 244-257, doi: 10.1360/N112014-00052

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ x_2(t+1) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x_i(t) \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ 是 Boolean 网络的 n 个结点在 t 时刻的状态, $f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $i = 1, 2, \dots, n$ 是 n 元 Boolean 函数.

对 Boolean 网络的研究, 国内外学者提出了许多不同的方法. 根据系统生物学中细胞和基因所处环境的时刻变化具有随机性, 文献 [5] 采用 Bayes 方法从概率角度研究了基因调控网络的性质, 对基因网络的控制以及如何构造描述细胞和基因演化规律的数学模型. 对于确定性 Boolean 网络, 从 Boolean 网络的状态方程出发, 可以得到它的所有不动点和极限环^[8~10]等拓扑性质. 但是已知网络的不动点和极限环, 并不能唯一确定所对应的 Boolean 网络. 文献 [11, 12] 研究了如何从不动点和极限环得到与之相容的一组布尔网络. 为了能从实验数据辨识出 Boolean 网络, 文献 [13] 研究了能辨识出网络模型所需要的输入输出数据对的上限和下限. 文献 [14] 利用网络结点之间的关联矩阵给出了一种推导化学反应网络的统计方法. 文献 [15] 给出了一种 REVEAL 算法, 从网络状态的转移表格来辨识 Boolean 网络. 文献 [11] 改进了 REVEAL 算法, 并证明辨识出一个有 n 个结点的 Boolean 网络需要有 $O(\log n)$ 组输入输出数据.

程代展在文献 [16] 中提出了矩阵的半张量积这一数学工具, 利用矩阵的半张量积, Boolean 网络被转化成线性离散系统, 通过对线性离散系统的研究得到了有关逻辑网络的拓扑结构^[9, 10]和相关控制问题^[17, 18], 这一方法称为逻辑系统的状态空间方法. 后来用状态空间方法研究逻辑系统被国内外学者广泛引用, 得到了一大批具有重要价值的结果, 形成了状态空间框架下的逻辑系统控制理论. 文献 [19~21] 分别从不同角度研究了 Boolean 网络系统的能控性、能观性问题. Boolean 控制网络的最优控制问题在文献 [22, 23] 中进行了研究. 文献 [24] 定义了奇异 Boolean 网络系统, 并在状态空间框架下进行了研究. 文献 [25, 26] 研究了随机 Boolean 控制网络的稳定性与能控性.

高阶 Boolean 控制网络又称时滞 Boolean 控制网络, 具有很强的应用背景. 文献 [27] 提出了由简单的囚徒困境问题衍生出的人和机器的博弈问题, 设某一时刻人和机器的状态是 0 或者 1, 而机器的策略选择具有 k 步内的人和机器的状态. 设 $\{x(0), x(1), \dots\}$ 表示机器的策略, $\{y(0), y(1), \dots\}$ 表示参与人的策略, 则机器的策略可以描述为

$$x(t+1) = f_m(x(t-k+1), y(t-k+1), \dots, x(t), y(t)). \quad (2)$$

文献 [27] 证明了人的最优策略可表示为具有 k 步记忆的 f_h , 即

$$y(t+1) = f_h(x(t-k+1), y(t-k+1), \dots, x(t), y(t)). \quad (3)$$

在这个模型中, 得到了参与人与机器博弈中各自策略的选择过程.

$$\begin{cases} x(t+1) = f_m(x(t-k+1), y(t-k+1), \dots, x(t), y(t)), \\ y(t+1) = f_h(x(t-k+1), y(t-k+1), \dots, x(t), y(t)), \end{cases} \quad (4)$$

系统 (4) 就是一个 k 阶 Boolean 网络.

文献 [28] 利用高阶 Boolean 网络的代数形式, 从代数角度研究了高阶 Boolean 网络的极限环性质. 高阶 Boolean 网络由于具有时滞, 使得其状态变化具有自身的复杂性, 不能通过简单的套用 Boolean 网络的状态空间方法 [28] 来研究它的极限环等拓扑性质. 文献 [29~31] 讨论了带有状态时滞的 Boolean 控制网络的相关能控性. 文献 [32] 利用符号动力学的 Artin-Mazur Zeta 和拓扑熵研究了 Boolean 网络的极限环个数和 Boolean 控制网络的拓扑熵.

受此启发, 本文用符号动力学的方法研究更具有一般性的高阶 Boolean 控制网络的极限环结构以及拓扑熵问题. 我们的研究推广了文献 [32] 的结果, 证明了任意一个 k 阶 Boolean 控制网络都是 k 步有限型移位系统. 我们用 Artin-Mazur Zeta 函数研究高阶 Boolean 网络的极限环个数, 利用拓扑熵得到高阶 Boolean 控制网络的相关信息.

本文安排如下: 第 2 节简要介绍用到的主要工具矩阵的半张量积和相关工作. 第 3 节给出高阶 Boolean 控制网络的矩阵表示. 在第 4 节建立高阶逻辑系统与有限型移位系统的对应, 并证明了 k 阶逻辑系统是 k 步有限型移位系统, 得到高阶逻辑系统的 Zeta 函数, 从 Zeta 函数计算得到高阶 Boolean 网络极限环个数. 第 5 节简要介绍了高阶 Boolean 控制网络的拓扑熵计算. 最后一节是一些总结.

2 准备工作

为叙述方便, 本文用到的基本符号列表如下:

- $\mathcal{D} = \{0 \sim F, 1 \sim T\}$;
- $\mathbf{1}_k := (\underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_k)^T$;
- δ_n^i 是单位矩阵 I_n 的第 i 列;
- $\Delta_n := \{\delta_n^i | i = 1, \dots, n\}$, $\Delta := \Delta_2$;
- 矩阵 $L \in M_{n \times r}$ 称为逻辑矩阵, 其中 $\text{Col}(L) \subset \Delta_n$, 全体 $n \times r$ 逻辑矩阵的集合为 $\mathcal{L}_{n \times r}$; 逻辑矩阵 $L = [\delta_n^{i_1}, \delta_n^{i_2}, \dots, \delta_n^{i_r}]$ 记为 $L = \delta_n[i_1, i_2, \dots, i_r]$;
- 矩阵 $B \in M_{n \times r}$ 称为 Boolean 矩阵, 其中 $b_{ij} \in \mathcal{D}$, 全体 $n \times r$ Boolean 矩阵的集合为 $\mathcal{B}_{n \times r}$;
- 设矩阵 $A = (a_{ij}) \in \mathcal{B}_{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{B}_{m \times n}$, 定义 $A \vee B = (a_{ij} \vee b_{ij})$.

本文将逻辑变量的取值与向量建立对应, 在不引起混淆的情况下, $1 \sim \delta_2^1$, $0 \sim \delta_2^2$, $\mathcal{D} \sim \Delta$.

2.1 矩阵的半张量积

本文用到的主要数学工具是文献 [16] 中提出的矩阵半张量积. 本文所指的“半张量积”是指左半张量积. 这一部分简单回顾半张量积的定义和主要性质, 主要介绍逻辑的矩阵表示, 并给出相关结果和表述记号.

定义 1 [16] 1. 设 X 是 np 维行向量, Y 是 p 维列向量. 将 X 等分成 p 块 X^1, \dots, X^p (均是 $1 \times n$ 维). 向量 X 和向量 Y 的半张量积 (STP) 定义为

$$\begin{cases} X \ltimes Y = \sum_{i=1}^p X^i y_i \in \mathbb{R}^n, \\ Y^T \ltimes X^T = \sum_{i=1}^p y_i (X^i)^T \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (5)$$

2. 设 $A \in M_{m \times n}$, $B \in M_{p \times q}$. 如果 n 是 p 的因子, 即 $nt = p$, 记为 $A \prec_t B$, 或 p 是 n 的因子, 即 $n = pt$, 记为 $A \succ_t B$, 则定义矩阵 A 和 B 的半张量积为 $C = A \ltimes B$, 其中 C 包含 $m \times q$ 子块. 记

$$C = (C^{ij}),$$

$$C^{ij} = A^i \times B_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, q,$$

其中 A^i 是 A 的第 i 行, B_j 是 B 的第 j 列.

注 1 如果 $A \in M_{m \times s}$, $B \in M_{s \times n}$, 传统的矩阵乘积 AB 是存在的, 并且

$$AB = A \times B.$$

因此, 矩阵的半张量积是传统矩阵乘积的推广. 基于此, 在本文中矩阵的半张量积符号“ \times ”通常省略. 如果两个矩阵的乘积存在, 矩阵的半张量积自然转化为传统的矩阵乘积. 更多关于矩阵半张量积的结果可参看文献 [16].

利用矩阵的半张量积, 将高阶逻辑动态系统转化为代数形式, 下述引理起了关键作用.

引理 1 [16, 18] (1) 设 $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{D}$ 是 n 个逻辑变量, $f(x_1, \dots, x_n)$ 是一个逻辑函数. 则存在唯一的矩阵 $M_f \in \mathcal{L}_{2 \times 2^n}$, 使得

$$f(x_1, \dots, x_n) = M_f \times_{i=1}^n x_i, \quad x_i \in \Delta. \quad (6)$$

式 (6) 称为是逻辑函数 f 的代数形式.

(2) 设 $p \in \Delta$. 则 $p^2 = M_r p$, 其中 $M_r = \delta_4^{[1,4]}$ 称为降幂矩阵.

(3) 设 $x = \times_{i=1}^k x_i \in \Delta_{2^k}$, 则 $x^2 = \Phi_k x$, 其中 $\Phi_k = \prod_{i=1}^k (I_{2^{i-1}} \otimes [(I_2 \otimes W_{[2, 2^{k-i}]}) M_r])$ 是向量 $x \in \Delta_{2^k}$ 的降幂矩阵.

(4) 设 $E_d := \delta_2[1 \ 2 \ 1 \ 2]$. 对任意的向量 $X, Y \in \Delta$,

$$E_d X Y = Y, \quad E_d W_{[2]} X Y = X. \quad (7)$$

利用逻辑变量的向量形式和逻辑算子的矩阵形式, 上述引理一个 n 元逻辑算子 L 可以用它的结构矩阵 $M_L \in \mathcal{L}_{2 \times 2^n}$ 表示. 在此基础上, 逻辑算子对逻辑变量的作用就变为结构矩阵与逻辑变量的作用. 可以参看文献 [16, 18, 33] 了解更多细节.

2.2 符号动力学

关于符号动力学介绍比较好的有文献 [34~36]. 本小节简要介绍符号动力学的基本概念, 一个有限集 \mathcal{A} 称为字母表, 集合 \mathcal{A} 中元素称为字母. 比如实数十进制表示所用的字母表就是 $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, 9\}$. 设 \mathcal{F} 是由 \mathcal{A} 中元素构成的字符串集合. 记 $X_{\mathcal{F}}$ 为 \mathcal{A} 字母构成的不包含 \mathcal{F} 中字符串的右侧无穷字符串序列.

设 $x = x_0 x_1 x_2 \dots$ 为 $X_{\mathcal{F}}$ 中的一个字符串, 移位映射 σ 定义为

$$\sigma(x) = \sigma(x_0 x_1 x_2 \dots) = x_1 x_2 \dots.$$

设 $x \in X_{\mathcal{F}}$, 若存在某个 $k \geq 1$, 使得 $\sigma^k(x) = x$, 则称序列 x 是 σ 的一个周期点, 并称序列 x 在映射 σ 下有周期 k .

正如文献 [36] 指出的, 移位映射的迭代提供了符号动力系统中的“动力学”机制. 移位空间和移位映射一起构成了一个“移位动力系统”, 记作 (X, σ) .

如果字符串集合 \mathcal{F} 是有限集合, 则称 $(X_{\mathcal{F}}, \sigma)$ 是单侧有限型移位系统. 在一个有限型移位系统 $(X_{\mathcal{F}}, \sigma)$ 中, 如果字符串集合 \mathcal{F} 中字符串长度是 $k+1$, 则称系统为 k 步有限型移位系统.

在符号动力学研究中, 比较有力的两个工具是 Artin-Mazur Zeta 函数和拓扑熵^[36]. 在 Artin-Mazur Zeta 函数中储存了移位系统中周期为 i 的序列点的个数 p_i . 定义如下:

$$\zeta(t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i \frac{t^i}{i}\right). \quad (8)$$

另一方面, 有限移位系统的 Artin-Mazur Zeta 函数也可以由下述定理计算.

定理 1^[36] 设 $(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, \sigma)$ 是一个具有 N 个字母的有限移位系统. 矩阵 $A \in \mathcal{B}_{n \times n}$ 是相应有限移位系统的邻接矩阵. 则 Artin-Mazur Zeta 函数为

$$\zeta(t) = (t^N P_A(1/t))^{-1}, \quad (9)$$

其中 $P_A(s) := \det(sI_N - A)$. 具有 N 个字母的有限移位系统 $(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, \sigma)$ 的邻接矩阵定义为 $A = (a_{ij}) \in \mathcal{B}_{N \times N}$, 其中 $a_{ij} = 1$ 当且仅当在移位系统中第 j 个在下一时刻变换为字母 i .

可以从 Artin-Mazur Zeta 函数的表达式 (9) 计算移位系统中周期为 i 的序列个数 p_i 如下:

$$p_i = \frac{1}{(i-1)!} \left. \frac{d^i(\ln \zeta(t))}{dt^i} \right|_{t=0}. \quad (10)$$

移位空间 $(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, \sigma)$ 的拓扑熵定义为

$$h = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \log(N_p),$$

其中 N_p 是容许长度为 p 的字母块的个数. 拓扑熵体现了移位系统中容许长度为 p 的子块的数量增长率.

文献 [32] 建立了 Boolean 控制网络和 1 步有限移位系统的联系, 用符号动力学的观点研究 Boolean 控制网络. 受此启发, 本文主要是将高阶 Boolean 网络和单向移位空间建立对应, 用高阶 Boolean 网络的 Zeta 函数和拓扑熵来研究高阶 Boolean 控制网络.

3 高阶 Boolean (控制) 网络

一个 k 阶 Boolean 网络系统表述如下:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), \dots, x_1(t-k+1), \dots, x_n(t-k+1)), \\ x_2(t+1) = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t), \dots, x_1(t-k+1), \dots, x_n(t-k+1)), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), \dots, x_1(t-k+1), \dots, x_n(t-k+1)), \end{cases} \quad (11)$$

其中 $x_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ 是 Boolean 网络的状态变量, $f_i, i = 1, 2, \dots, n$ 是 nk 元 Boolean 函数.

由引理 1, 可以得到逻辑函数 f_i 的结构矩阵记为 M_i . 设 $x(t) = \times_{i=1}^n x_i(t)$, 则 (11) 可以被表示为

$$x_i(t+1) = M_i x(t-k+1) \cdots x(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad t = k-1, k, \dots \quad (12)$$

利用矩阵的半张量积, 将 (12) 乘起来得到如下表示形式:

$$x(t+1) = M_1 \times_{i=t-k+1}^t x(i) M_2 \times_{i=t-k+1}^t x(i) \cdots M_n \times_{i=t-k+1}^t x(i)$$

$$= L_{01} \times_{i=t-k+1}^t x(i), \tag{13}$$

其中

$$L_{01} = M_1 \prod_{j=2}^n [(I_{2^{kn}} \otimes M_j) \Phi_{kn}].$$

含有控制的 k 阶逻辑动态系统表示为

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), \dots, x_1(t-k+1), \dots, x_n(t-k+1), u_1(t), \dots, u_m(t)), \\ x_2(t+1) = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t), \dots, x_1(t-k+1), \dots, x_n(t-k+1), u_1(t), \dots, u_m(t)), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), \dots, x_1(t-k+1), \dots, x_n(t-k+1), u_1(t), \dots, u_m(t)), \end{cases} \tag{14}$$

其中 $x_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ 是 Boolean 网络的状态变量, $u_j(t), j = 1, 2, \dots, m$ 是 Boolean 网络的输入变量, $f_i, i = 1, 2, \dots, n$ 是 $nk + m$ 元 Boolean 函数.

设 $u(t) = \times_{i=1}^m u_i(t) \in \Delta_{2^m}$, 则 (14) 可以表示为

$$x_i(t+1) = M_i u(t) x(t-k+1) \cdots x(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

将上述 n 个方程用矩阵的半张量积乘起来得到

$$x(t+1) = L_{02} u(t) x(t-k+1) \cdots x(t), \tag{15}$$

其中

$$L_{02} = M_1 \prod_{j=2}^n [(I_{2^{kn+m}} \otimes M_j) \Phi_{kn+m}].$$

例 1 (1) 考虑 Boolean 网络

$$\begin{cases} A(t+1) = A(t-2) \leftrightarrow B(t-1), \\ B(t+1) = A(t-1) \vee B(t-2); \end{cases} \tag{16}$$

容易看出, 系统 (16) 是 3 阶的 Boolean 网络. 设 $x(t) = A(t) \times B(t)$, 则系统 (16) 表示为

$$x(t+1) = L_{01} x(t-2) x(t-1) x(t), \tag{17}$$

其中 $L_{01} \in \mathcal{L}_{2^2 \times 2^6}$,

$$\begin{aligned} L_{01} = \delta_4 [& 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \\ & 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \\ & 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ & 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]. \end{aligned} \tag{18}$$

(2) 考虑 Boolean 控制网络

$$\begin{cases} A(t+1) = (B(t) \vee A(t-1)), \\ B(t+1) = (u(t) \leftrightarrow B(t-1)) \wedge A(t). \end{cases} \tag{19}$$

系统 (19) 是 2 阶带有控制的 Boolean 网络系统. 设 $x(t) = A(t) \times B(t)$, 则系统 (19) 表示为

$$x(t+1) = L_{02}u(t)x(t-1)x(t), \quad (20)$$

其中 $L_{02} \in \mathcal{L}_{2^2 \times 2^5}$,

$$L_{02} = \delta_4 [\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 4 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{matrix}]. \quad (21)$$

高阶 Boolean 控制网络 (15) 用映射表示为

$$x(t+1) = f(u(t), x(t-k+1), \dots, x(t)), \quad (22)$$

其中 $x(t) = \times_{i=1}^n x_i(t)$, $u(t) = \times_{j=1}^m u_j(t)$, 映射 $f: \Delta_{2^{kn+m}} \rightarrow \Delta_{2^n}$. 通过选取不同的控制序列 $\{u(t)\}$ 和初始状态 $x(0), x(1), \dots, x(k-1)$, 高阶 Boolean 控制网络在控制下的状态轨线集合为

$$\mathcal{A}_{S_1} = \{x(0)x(1) \cdots x(k)x(k+1) \cdots : x(t+1) = f(u(t), x(t-k), x(t-k+1), \dots, x(t)), \\ u(t) \in \Delta_{2^m}, x(0), x(1), \dots, x(k-1) \in \Delta_{2^n}\}. \quad (23)$$

特别地, 高阶 Boolean 网络 (13) 用映射表示为

$$x(t+1) = f(x(t-k+1), \dots, x(t)), \quad (24)$$

其中 $x(t) = \times_{i=1}^n x_i(t)$, 映射 $f: \Delta_{2^{kn}} \rightarrow \Delta_{2^n}$. 通过选取不同的初始状态 $x(0), x(1), \dots, x(k-1)$, 高阶 Boolean 网络的状态轨线集合为

$$\mathcal{A}_{S_2} = \{x(0)x(1) \cdots x(k)x(k+1) \cdots : x(t+1) = f(x(t-k), x(t-k+1), \dots, x(t)), \\ \forall x(0), x(1), \dots, x(k-1) \in \Delta_{2^n}\}. \quad (25)$$

4 k 阶 Boolean 控制网络系统的 Zeta 函数

本节首先证明 k 阶 Boolean 控制网络 (15) 的状态轨线集合为一个 k 步有限型移位系统.

定义

$$M = \bigvee_{j=1}^{2^m} \text{Blk}_j(L_{02}), \quad (26)$$

其中 L_{02} 为 (15) 的逻辑矩阵.

命题 1 在 k 阶 Boolean 控制网络系统 (15) 中, 任意控制序列作用下, 网络的状态轨线集合 \mathcal{A}_{S_1} 是一个在字母表 $\{\delta_{2^n}^1, \dots, \delta_{2^n}^{2^n}\}$ 上的 k 步有限型移位系统.

证明 考虑 k 步有限型移位系统 $(X_{\mathcal{F}}, \sigma)$, 其中

$$\mathcal{F} = \{\delta_{2^n}^{i_1} \cdots \delta_{2^n}^{i_k} \delta_{2^n}^{i_{k+1}} : [M]_{i_{k+1}, (i_1-1)2^{(k-1)n} + (i_2-1)2^{(k-2)n} + \cdots + (i_{k-1}-1)2^n + i_k} = 0\}.$$

我们将证明 k 步有限型移位系统 $(X_{\mathcal{F}}, \sigma)$ 的点和 Boolean 控制网络系统 (15) 的状态轨线序列是一一对应的. 首先说明 Boolean 控制网络系统 (15) 的状态轨线是 $(X_{\mathcal{F}}, \sigma)$ 中的点, 设 (23) 中的一条轨线 $w = \delta_{2^n}^{i_1} \cdots \delta_{2^n}^{i_k} \cdots \in \mathcal{A}_{S_1}$, 则对任意的 $t (t \geq k)$, 存在 $u(t)$ ($u(t)$ 可能不唯一), 使得

$$\delta_{2^n}^{i_{t+1}} = (L_{02} \times u(t)) \delta_{2^n}^{i_{t-k+1}} \cdots \delta_{2^n}^{i_t},$$

因此 $[L_{02} \times u(t)]_{i_{t+1}, (i_{t-k+1}-1)2^{(k-1)n} + (i_{t-k+2}-1)2^{(k-2)n} + \dots + (i_{t-1}-1)2^n + i_t} = 1$, 进而有

$$[M]_{i_{t+1}, (i_{t-k+1}-1)2^{(k-1)n} + (i_{t-k+2}-1)2^{(k-2)n} + \dots + (i_{t-1}-1)2^n + i_t} = 1,$$

即轨线 $w = \delta_{2^n}^{i_1} \dots \delta_{2^n}^{i_k} \dots$ 中的任意一个长度为 $k+1$ 的子块都不属于 \mathcal{F} . 所以, 高阶 Boolean 控制网络的状态轨线 w 是 k 步有限型移位系统 $(X_{\mathcal{F}}, \sigma)$ 的一个点.

其次, k 步有限型移位系统 $(X_{\mathcal{F}}, \sigma)$ 的点都对应 Boolean 控制网络系统 (15) 的一条状态轨线. 设 $w = \delta_{2^n}^{i_1} \dots \delta_{2^n}^{i_k} \dots \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ 是 k 步有限型移位系统 $(X_{\mathcal{F}}, \sigma)$ 的一个序列点, 则对于任意的位置 $t (\geq k-1)$, 我们有

$$[M]_{i_{t+1}, (i_{t-k+1}-1)2^{(k-1)n} + (i_{t-k+2}-1)2^{(k-2)n} + \dots + (i_{t-1}-1)2^n + i_t} = 1.$$

即至少存在一个 $u \in \Delta_{2^m}$, 使得

$$[L_{02} \times u]_{i_{t+1}, (i_{t-k+1}-1)2^{(k-1)n} + (i_{t-k+2}-1)2^{(k-2)n} + \dots + (i_{t-1}-1)2^n + i_t} = 1,$$

进一步, 对任意的 $t (\geq k-1)$, 存在控制 $u(t)$,

$$\delta_{2^n}^{i_{t+1}} = (L_{02} \times u(t)) \delta_{2^n}^{i_{t-k+1}} \dots \delta_{2^n}^{i_t}.$$

因此, $w = \delta_{2^n}^{i_1} \dots \delta_{2^n}^{i_k} \dots$ 是 高阶 Boolean 控制网络 (15) 的状态轨线. 证明结束.

推论 1 在 k 阶 Boolean 网络系统 (15) 中, 网络的状态轨线集合是一个字母表 $\{\delta_{2^n}^1, \dots, \delta_{2^n}^{2^n}\}$ 上的 k 步有限型移位系统.

为了用有限移位系统 Zeta 函数得到 k 阶 Boolean 控制网络系统的结构和拓扑熵, 我们需要计算高阶 Boolean 网络系统 (13) 的状态转移矩阵.

设 $z(t) = \times_{i=t}^{t+k-1} x(i) \in \Delta_{2^{nk}}$, $t = 0, 1, 2, \dots$, 则

$$\begin{aligned} z(t+1) &= x(t+1) \cdots x(t+k) \\ &= (E_d)^n x(t)x(t+1) \cdots x(t+k-1)x(t+k) \\ &= (E_d)^n \times_{i=t}^{t+k-1} x(i) L_{01} \times_{i=t}^{t+k-1} x(i) \\ &= (E_d)^n z(t) L_{01} z(t) \\ &= (E_d)^n (I_{2^{kn}} \otimes L_{01}) \Phi_{kn} z(t) \\ &:= L_1 z(t), \end{aligned} \tag{27}$$

其中 $L_1 = (E_d)^n (I_{2^{kn}} \otimes L_{01}) \Phi_{kn} \in \mathcal{L}_{2^{kn} \times 2^{kn}}$.

相应地, 对于含有控制的高阶系统 (15), 有

$$\begin{aligned} z(t+1) &= x(t+1) \cdots x(t+k) \\ &= (E_d)^n x(t)x(t+1) \cdots x(t+k-1)x(t+k) \\ &= (E_d)^n x(t)x(t+1) \cdots x(t+k-1) L_{02} u(t+k-1)x(t)x(t+1) \cdots x(t+k-1) \\ &= (E_d)^n (I_{2^{kn}} \otimes L_{02}) W_{[2^m, 2^{kn}]} u(t+k-1) \Phi_{kn} x(t)x(t+1) \cdots x(t+k-1) \\ &= (E_d)^n (I_{2^{kn}} \otimes L_{02}) W_{[2^m, 2^{kn}]} (I_{2^m} \otimes \Phi_{kn}) u(t+k-1)x(t)x(t+1) \cdots x(t+k-1) \\ &:= L_2 u(t+k-1)z(t), \end{aligned} \tag{28}$$

其中

$$L_2 = (E_d)^n (I_{2^{kn}} \otimes L_{02}) W_{[2^m, 2^{kn}]} (I_{2^m} \otimes \Phi_{kn}) \in \mathcal{L}_{2^{kn} \times 2^{kn+m}}.$$

式 (27) 和 (28) 称为高阶 Boolean 网络 (13)(高阶 Boolean 控制网络 (15)) 的代数形式. 从形式上看, 式 (27) 和 (28) 可以理解为具有 kn 个逻辑变量的 Boolean 网络系统, 在研究系统 (27) 的极限环时需要注意状态 $z(t+1)$ 与状态 $z(t)$ 不是独立的, 因为 $z(t) = x(t) \times x(t+1) \times \cdots \times x(t+k-1)$, 而 $z(t+1) = x(t+1) \times x(t+2) \times \cdots \times x(t+k-1) \times x(t+k)$.

定理 2^[28] 系统 (27) 的状态轨线和系统 (13) 的状态轨线之间存在一一对应.

代数形式 (27) 和 (13) 的不动点和极限环是一一对应的, 我们可以通过讨论系统 (27) 的不动点和各种长度极限环的个数间接得到 (13) 的相关拓扑性质. 设 $z = \times_{i=0}^{k-1} x_i \in \Delta_{2^{kn}}$, 其中 $x_i \in \Delta_{2^n}$. 构造映射 $\pi: \Delta_{2^{kn}} \rightarrow \Delta_{2^n}$,

$$\pi(z) = (I_{2^n} \otimes \mathbf{1}_{2^{(k-1)n}}^T) z. \quad (29)$$

由文献 [28], 可得

$$\pi(z) = x_0. \quad (30)$$

记 Boolean 控制网络 (15) 对应的有限移位系统为 $(X_{\mathcal{F}}, \sigma)$. 将有限移位系统 $(X_{\mathcal{F}}, \sigma)$ 的 Zeta 函数作为 Boolean 控制网络 (15) 的 Zeta 函数. 由定理 1 和 2, 可得如下结论.

推论 2 高阶 Boolean 控制网络 (15) 的 Zeta 函数, 即系统 (28) 的 Zeta 函数为

$$\zeta(t) = (t^{2^n} P_M(1/t))^{-1}, \quad (31)$$

其中 $P_M(s) = \det(sI_{2^n} - M)$ 是矩阵 M 的特征多项式, $M = \bigvee_{j=1}^{2^m} \text{Blk}_j(L_2)$.

推论 3 高阶 Boolean 网络 (11) 的 Zeta 函数, 即系统 (27) 的 Zeta 函数为

$$\zeta(t) = (t^{2^n} P_{L_1}(1/t))^{-1}, \quad (32)$$

其中 $P_{L_1}(s) = \det(sI_{2^n} - L_1)$ 是高阶 Boolean 网络 (11) 结构矩阵 L_1 的特征多项式.

例 2 考虑例 1 中的高阶 Boolean 网络 (16), 从其表示形式 (17) 得到

$$z(t+1) = L_1 z(t), \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned} L_1 = \delta_{64} [& 1 \ 5 \ 9 \ 13 \ 19 \ 23 \ 27 \ 31 \ 33 \ 37 \ 41 \ 45 \ 51 \ 55 \ 59 \ 63 \\ & 1 \ 5 \ 9 \ 13 \ 19 \ 23 \ 27 \ 31 \ 34 \ 38 \ 42 \ 46 \ 52 \ 56 \ 60 \ 64 \\ & 3 \ 7 \ 11 \ 15 \ 17 \ 21 \ 25 \ 29 \ 35 \ 39 \ 43 \ 47 \ 49 \ 53 \ 57 \ 61 \\ & 3 \ 7 \ 11 \ 15 \ 17 \ 21 \ 25 \ 29 \ 36 \ 40 \ 44 \ 48 \ 50 \ 54 \ 58 \ 62]. \end{aligned} \quad (34)$$

其状态转移图如图 1 (网络 (33) 的状态 δ_{64}^k 在图 1 中表示为 k).

由式 (29), 设 $\pi(z) = (I_{2^2} \otimes \mathbf{1}_{2^{(3-1)2}}^T) z$, 则系统 (17) 的状态 $x(t) = \pi(z(t)) = \pi(x(t) \times x(t+1) \times x(t+2))$, 得到系统 (17) 的轨线 $x(t)$ 的轨线图如图 2 (网络 (17) 的状态 δ_4^k 在图 2 中表示为 k).

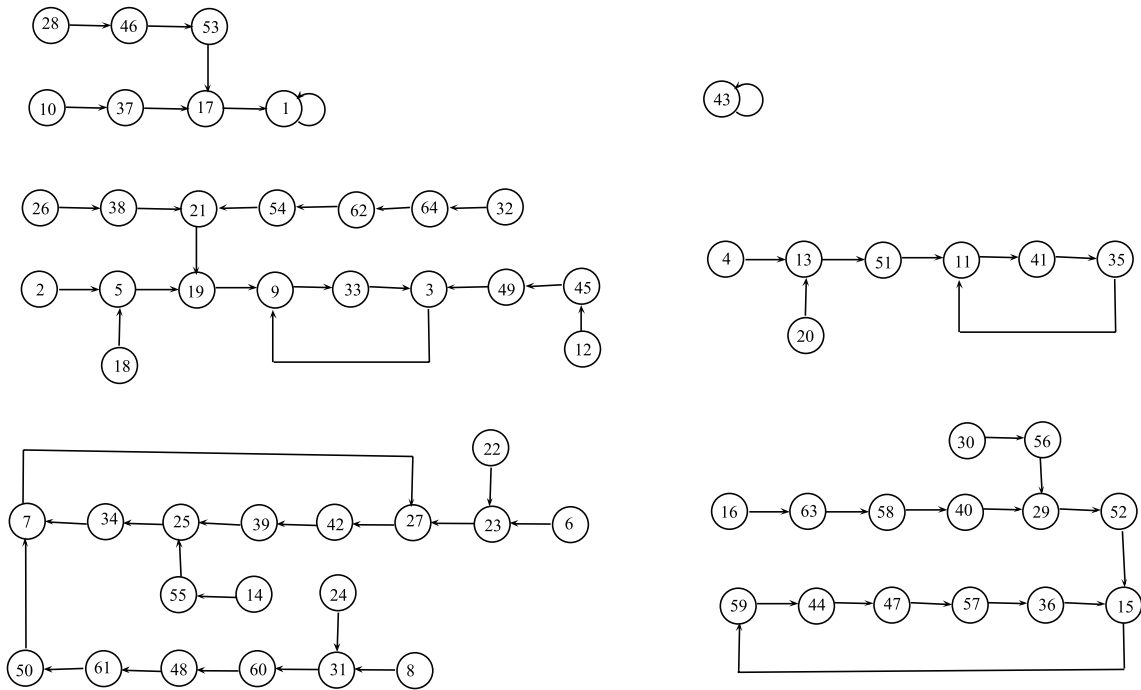


图 1 系统 (33) 的 6 个极限环
Figure 1 The 6 cycles of system (33)

这里, 我们利用 Zeta 函数找到高阶 Boolean 网络 (17) 的极限环信息. 高阶 Boolean 网络 (17) 的状态转移矩阵为式 (27) 中的 L_1 , 其特征多项式为

$$P_{L_1}(s) = s^{64} - 2s^{63} + s^{62} - 2s^{61} + 4s^{60} - 2s^{59} - s^{58} + 2s^{57} - s^{56} + 4s^{55} - 8s^{54} + 4s^{53} - s^{52} + 2s^{51} - s^{50} - 2s^{49} + 4s^{48} - 2s^{47} + s^{46} - 2s^{45} + s^{44}. \quad (35)$$

由推论 3, 高阶 Boolean 网络 (17) 的 Zeta 函数为

$$\zeta(t) = (t^{2^2 \times 3} P_{L_1}(1/t))^{-1} = \frac{1}{p(t)}, \quad (36)$$

其中

$$p(t) = t^{20} - 2t^{19} + t^{18} - 2t^{17} + 4t^{16} - 2t^{15} - t^{14} + 2t^{13} - t^{12} + 4t^{11} - 8t^{10} + 4t^9 - t^8 + 2t^7 - t^6 - 2t^5 + 4t^4 - 2t^3 + t^2 - 2t + 1.$$

记 $g(t) := \ln \zeta(t) = -\ln(p(t))$. 计算 Zeta 函数 (8) 中的参数 p_i 如下:

$$p_1 = \frac{1}{0!} \frac{dg(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 2; \quad p_2 = \frac{1}{1!} \frac{d^2g(t)}{dt^2} \Big|_{t=0} = 2; \quad p_3 = \frac{1}{2!} \frac{d^3g(t)}{dt^3} \Big|_{t=0} = 8; \quad p_4 = \frac{1}{3!} \frac{d^4g(t)}{dt^4} \Big|_{t=0} = 4;$$

$$p_5 = \frac{1}{4!} \frac{d^5g(t)}{dt^5} \Big|_{t=0} = 2; \quad p_6 = \frac{1}{5!} \frac{d^6g(t)}{dt^6} \Big|_{t=0} = 24; \quad p_7 = \frac{1}{6!} \frac{d^7g(t)}{dt^7} \Big|_{t=0} = 2; \quad \dots$$

由 p_i , 可计算出高阶 Boolean 网络 (33) 中各种长度极限环的个数 q_i [32],

$$q_i = \frac{p_i - \sum_{j \in D(i)} p_j}{i},$$

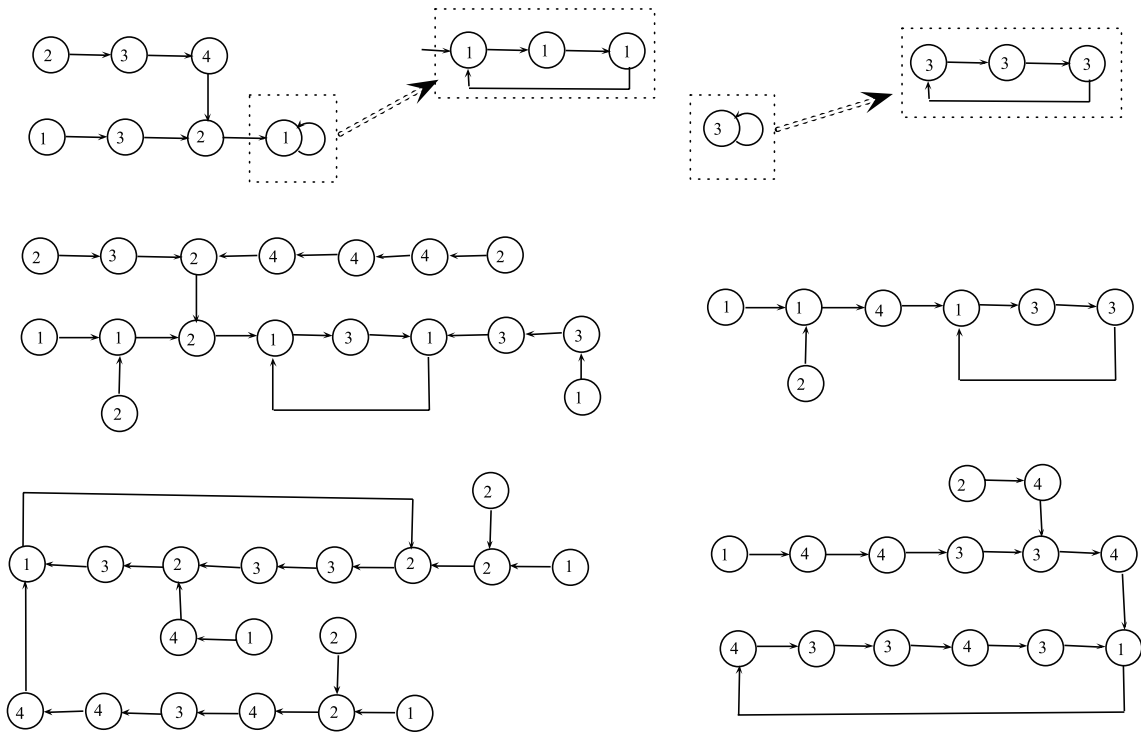


图 2 系统 (17) 的 6 个极限环
Figure 2 The 6 cycles of system (17)

其中 $D(i)$ 为 i 的不包含自身的因子集合, 比如 $D(2) = \{1\}$, $D(3) = \{1\}$, $D(9) = \{1, 3\}$ 等. 由上述计算可知,

$$q_1 = 2; q_2 = 0; q_3 = 2; q_4 = 0; q_5 = 0; q_6 = 2.$$

因此, 系统 (33) 的有两个不动点、两个长为 3 的极限环、两个长为 6 的极限环, 即 3 阶 Boolean 网络 (17) 有两个不动点、两个长为 3 的极限环、两个长为 6 的极限环. 此结果与状态轨线图 2 一致.

注 2 对于 3 阶 Boolean 网络 (17), 系统具有 3 阶的时滞, 为了得出 $t+1$ 时刻的状态 $x(t+1)$, 我们必须知道状态 $x(t-2), x(t-1), x(t)$, 为此在我们得到系统具有不动点之后, 应该将不动点理解为持续 3 个时刻状态的演化. 比如图 2 中的不动点 δ_4^1 可理解为 $\delta_4^1 \rightarrow \delta_4^1 \rightarrow \delta_4^1$, 不动点 δ_4^3 可理解为 $\delta_4^3 \rightarrow \delta_4^3 \rightarrow \delta_4^3$.

5 k 阶 Boolean 控制网络系统的拓扑熵

对于一阶 Boolean 控制网络,

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)), \\ x_2(t+1) = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)), \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)), \end{cases} \quad (37)$$

其中 $x_i, u_k \in \mathcal{D}$, x_i 为状态变量, u_k 为控制变量, f_i 是相应的 Boolean 函数. 利用矩阵的半张量积, 设 $x(t) = \times_{i=1}^n x_i(t)$, $u(t) = \times_{i=1}^m u_i(t)$, Boolean 控制网络的代数形式为

$$x(t) = Lu(t)x(t),$$

其中 $L \in \mathcal{L}_{2^n \times 2^{n+m}}$ 是 Boolean 控制网络 (37) 的结构矩阵 [18].

在文献 [32] 中, Boolean 控制网络 (37) 的拓扑熵定义为

$$h_S = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \log |A_s^j|, \tag{38}$$

其中 A_s^j 表示长为 j 的状态轨线的集合, $|\cdot|$ 表示集合的基数. Boolean 控制网络 (37) 的拓扑熵可以从矩阵 $M = \text{Blk}_1(L) \vee \text{Blk}_2(L) \vee \dots \vee \text{Blk}_{2^m}(L)$ 的模最大特征值得到, 即

$$h_S = \log \lambda_M.$$

由定理 2, 高阶 Boolean 控制网络 (15) 的轨线和 (28) 的轨线存在一一对应, 为此高阶 Boolean 控制网络的拓扑熵可以由下式得到

$$h_S = \log \lambda_M, \tag{39}$$

其中 $M = \vee_{j=1}^{2^m} \text{Blk}_j(L_2)$.

例 3 对于高阶 Boolean 控制网络 (20), 其代数形式为

$$z(t+1) = L_2 u(t+k-1)z(t),$$

结构矩阵 L_2 为

$$L_2 = \delta_{16} [1 \ 5 \ 10 \ 14 \ 2 \ 6 \ 10 \ 14 \ 1 \ 7 \ 10 \ 16 \ 2 \ 8 \ 10 \ 16 \\ 2 \ 6 \ 10 \ 14 \ 1 \ 5 \ 10 \ 14 \ 2 \ 8 \ 10 \ 16 \ 1 \ 7 \ 10 \ 16]. \tag{40}$$

为此, $M = \text{Blk}_1(L_2) \vee \text{Blk}_2(L_2)$,

$$M = \delta_{16} [\{1, 2\} \ \{5, 6\} \ 10 \ 14 \ \{1, 2\} \ \{5, 6\} \ 10 \ 14 \ \{1, 2\} \ \{7, 8\} \ 10 \ 16 \ \{1, 2\} \ \{7, 8\} \ 10 \ 16], \tag{41}$$

其中 $\delta_{16}[\{1, 2\}]$ 表示一个 Boolean 向量, 其中第 1, 2 两个分量为 1, 比如

$$\delta_{16}[\{1, 2\}] = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]'$$

Boolean 矩阵 M 的最大特征值为 2, 因此式 (20) 的拓扑熵为 $\log 2$. 拓扑熵反映了高阶 Boolean 控制网络的控制信息量大小, 关于拓扑熵反映的逻辑系统控制信息是下一步的研究方向.

6 结论

高阶 Boolean 控制网络系统是一类逻辑系统, 又称为时滞系统. 由于系统本身具有时滞特点, 因此系统的状态演化比较复杂, 具有特殊性. 我们利用矩阵的半张量积将高阶逻辑动态系统转化为代数形式, 然后从符号动力学的角度研究了高阶 Boolean 控制网络系统. 主要证明了 k 阶 Boolean 网络系统

与 k 步有限型移位系统之间的关系, 即 k 阶 Boolean 网络系统是 k 步有限型移位系统. Zeta 函数和拓扑熵是研究符号动力学系统的主要工具, 这为研究一般的逻辑动态系统提供了新的思路. 另外, 拓扑熵在逻辑动态系统中的作用还没有被充分挖掘, 是我们以后进一步研究的方向.

本文主要在符号动力学框架下, 对高阶 Boolean 控制网络进行了研究, 所得的结果可以直接推广到多值网络系统.

参考文献

- 1 Yamada S, Shiono S, Joo A, et al. Control mechanism of JAK/STAT signal transduction pathway. *FEBS Letters*, 2003, 534: 190–196
- 2 Mestl T, Plahte E, Omholt S W. A mathematical framework for describing and analysing gene regulatory networks. *J Theor Biol*, 1995, 176: 291–300
- 3 Kauffman S A. Metabolic stability and epigenesis in randomly constructed genetic nets. *J Theor Biol*, 1969, 22: 437–467
- 4 Kauffman S A. *The Origins of Order: Self-organization and Selection in Evolution*. New York: Oxford University Press, 1993
- 5 Harley H, M, Adam A. Stochastic mechanisms in gene expression. *Proc Natl Acad Sci*, 1997, 94: 814–819
- 6 Bemporad A, Morari M. Control of systems integrating logic, dynamics and constraints. *Automatica*, 1999, 35: 407–427
- 7 Aldana M. Boolean dynamics of networks with scale-free topology. *Phys D*, 2003, 185: 45–66
- 8 Drossel B, Mihaljev T, Greil F. Number and length of attractors in critical Kauffman model with connectivity one. *Phys Rev Lett*, 2005, 94: 088701
- 9 Cheng D, Qi H. A linear representation of dynamics of Boolean networks. *IEEE Trans Auto Contr*, 2010, 55: 2251–2258
- 10 Li Z, Song J. Controllability of Boolean control networks avoiding states set. *Sci China Inf Sci*, 2014, 57: 032205
- 11 Akutsu T, Miyano S, Kuhara S. Identification of genetic networks from a small number of gene expression patterns under the Boolean network model. *Pacific Symposium Biocomput*, 1999, 4: 17–28
- 12 Pal R, Ivanov I, Datta A, et al. Generating Boolean networks with a prescribed attractor structure. *Syst Biol*, 2005, 21: 4021–4025
- 13 Akutsu T, Kuhara S, Maruyama O, et al. Identification of gene regulatory networks by strategic gene disruptions and gene over expressions. In: *Proceedings of the ninth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, Philadelphia, 1998. 695–702
- 14 Arkin A, Shen P, Ross J. A test case of correlation metric construction of a reaction pathway from measurements. *Science*, 1997, 277: 1275
- 15 Liang S, Fuhrman S, Somogyi R. Reveal, a general reverse engineering algorithm for inference of genetic network architectures. *Pac Symp Biocomput*, 1998, 3: 18–29
- 16 Cheng D, Qi H. *Semi-tensor Product of Matrix—theory and Applications*. Beijing: Science Press, 2007 [程代展, 齐洪胜. 矩阵的半张量积理论与应用. 北京, 科学出版社, 2007]
- 17 Cheng D, Qi H. Controllability and observability of Boolean control networks. *Automatica*, 2009, 45: 1659–1667
- 18 Cheng D, Qi H, Li Z. *Analysis and Control of Boolean Networks—A Semi-tensor Product Approach*. London: Springer, 2011
- 19 Ettore F, Maria E V. Observability, reconstructibility and state observers of Boolean control networks. *IEEE Trans Automatic Control*, 2013, 58: 1390–1401
- 20 Laschov D, Margaliot M. Controllability of Boolean control networks via the Perron-Frobenius theory. *Automatica*, 2012, 48: 1218–1223
- 21 Laschov D, Margaliot M, Guy Even. Observability of Boolean networks: a graph-theoretic approach. *Automatica*, 2013, 49: 2351–2362
- 22 Laschov D, Margaliot M. A maximum principle for single-input Boolean control networks. *IEEE Trans Aut Contr*, 2011, 56: 913–917
- 23 Laschov D, Margaliot M. Minimum-time control of Boolean networks. *SIAM J Contr Opt*, 2013, 51: 2869–2892
- 24 Feng J, Yao J, Cui P. Singular Boolean networks: semi-tensor product approach. *Sci China Inf Sci*, 2013, 56: 112203
- 25 Zhao Y, Cheng D Z. On controllability and stabilizability of probabilistic Boolean control networks. *Sci China Inf Sci*, 2014, 57: 012202

- 26 Li F, Sun J. Controllability of probabilistic Boolean control networks. *Automatica*, 2011, 47: 2765–2771
- 27 Mu Y, Guo L. Optimization and identification in a non-equilibrium dynamic game. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on CDC-CCC'09, Shanghai, 2009*. 5750–5755
- 28 Li Z, Zhao Y, Cheng D. Structure of higher order Boolean networks. *J Graduate Univ Chinese Academy Sci*, 2011, 28: 431–447
- 29 Li F, Sun J. Controllability of Boolean control networks with time delays in states. *Automatica*, 2011, 47: 603–607
- 30 Zhang L, Zhang K Z. Controllability of time-variant Boolean control networks and its application to Boolean control networks with finite memories. *Sci China Inf Sci*, 2013, 56: 108201
- 31 Zhang L, Feng J, Meng M. Controllability of higher order switched boolean control networks. In: *9th Asian Control Conference, Istanbul, 2013*. 1–6
- 32 Gal H, Michael M, Ettore F, et al. Symbolic dynamics of Boolean control networks. *Automatica*, 2013, 49: 2525–2530
- 33 Cheng D. Semi-tensor product of matrices and its applications—a survey. *ICCM*, 2007, 3: 641–668
- 34 Williams S G. Introduction to symbolic dynamics. *Proc Symp Appl Math*, 2004, 60: 1–12
- 35 Kitchens B. *Symbolic Dynamics: One-sided, Two-sided and Countable State Markov Chains*. Berlin: Springer, 1998
- 36 Lind D, Marcus B. *Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge. UK: Cambridge Univ Press, 1995

Symbolic dynamics approach to higher order Boolean control networks

Jinli SONG & Zhiqiang LI*

School of Mathematics and Information Science, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou 450046, China

*E-mail: lizhiqiang@amss.ac.cn

Abstract The Artin-Mazur Zeta function and topological entropy are two main tools for studying symbolic dynamics. The Artin-Mazur Zeta function includes a number of cycles of different length, and topological entropy reflects the exponential growth rate of the number of n -blocks in symbolic dynamics. Using the semi-tensor product of matrices, under the framework of symbolic dynamics, we investigate the topological structure of higher-order Boolean control networks, which is a special class of higher-order logical control systems. First, a one-to-one correspondence between a k -order logical control network and k -step finite shift of finite type (or k -step finite SFT for short) is constructed. Then, a number of cycles of different length are obtained from the Artin-Mazur Zeta function, and control information from the higher-order Boolean network is learned from the topological entropy. The main contribution of this paper is to provide one-to-one correspondence between a k -order logical control network and k -step finite SFT.

Keywords higher-order Boolean control networks, semi-tensor product, symbolic dynamics, Artin-Mazur Zeta function, topological entropy



Jinli SONG was born in 1981. She received her M.S. degree in Applied Mathematics from the Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou, in 2007. She is currently a lecturer with the School of Mathematics and Information Science, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou. Her research interests include nonlinear systems control and complex systems.



Zhiqiang LI was born in 1980. He received his Ph.D. degree in systems theory from the Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing, in 2010. He is currently an associate professor with the School of Mathematics and Information Science, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou. His research interests include logical dynamic systems and game theory.